CdL in Ingegneria Gestionale

Risoluzione della prova scritta di **Algebra lineare e geometria**- 28 Gennaio 2008

I

Dato il sottospazio $V = \mathcal{L}((1,0,-1,0),(-2,1,0,0),(1,0,1,0))$ di $\mathbb{R}^4$ è assegnata l'applicazione lineare $f : V \to \mathbb{R}^4$ definito dalle relazioni

$$\begin{array}{l} f(1,0,-1,0) = (-1-2h, 2h+2, 2h+1, 0) \\ f(-2,1,0,0) = (h-1, 1, h-1, 0) \\ f(1,0,1,0) = (1,0,-1,0) \end{array}$$

con h parametro reale.

1) Verificare che $Im\ f \subset V$.

2) Detto $f' : V \to V$ l'endomorfismo indotto da f, studiare f' al variare di h determinando in ciascun caso una base di $Im\ f'$ e una base di $Ker\ f'$.

3) Studiare la semplicità di f' nel caso $h = -1$.

4) Nel caso $h = -1$ si consideri l'endomorfismo $g : V \to V$ tale che

$$\begin{array}{l} Ker\ f' = Ker\ g \\ g(3,2,-1,0) = (6,4,-10,0) \\ g(1,0,0,0) = (2,2,-5,0) \end{array}$$

Provare che g è semplice. Diagonalizzare g indicando la matrice diagonalizzante.

Risoluzione

1) Trovare l'equazione cartesiana di V dato che $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ devono appartenere a V

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \Rightarrow \textit{riducendo} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana di V è $t = 0 \Rightarrow f(v_1),\ f(v_2),\ f(v_3) \in V$.

2) Scegliamo come base di V la base $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e scriviamo la matrice associata a f' rispetto a tale base:
-)$f'(v_1) = (-1-2h, 2h+2, 2h+1, 0) = xv_1 + yv_2 + zv_3 = (x-2y+z, y, -x+z, 0) \Rightarrow (x,y,z)_{\mathcal{A}} = (1, 2h+2, 2h+2)_{\mathcal{A}}$
-)$f'(v_2) = (h-1, 1, h-1, 0) \Rightarrow (1,1,h)_{\mathcal{A}}$
-)$f'(v_3) = (1,0,-1,0) \Rightarrow (1,0,0)_{\mathcal{A}}$

$$M^{\mathcal{A}}(f') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2h+2 & 1 & 0 \\ 2h+2 & h & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il rango di questa matrice:
se $h \neq \pm 1 \Rightarrow \rho(M^{\mathcal{A}}(f')) = 3 \Rightarrow dimIm\ f' = 3 \Rightarrow Im\ f' = \mathcal{L}((1, 2h{+}2, 2h{+}2)_{\mathcal{A}}, (1, 1, h)_{\mathcal{A}}, (1, 0, 0)_{\mathcal{A}})$ quindi $Im\ f' = \mathcal{L}(v_1 + (2h+2)v_2 + (2h+2)v_3, v_1 + v_2 + hv_3, v_1) \subset \mathbb{R}^4 \Rightarrow dimKerf' = 0$.
se $h = 1 \Rightarrow \rho(M^{\mathcal{A}}(f')) = 2 \Rightarrow dimIm\ f' = 2 \Rightarrow Im\ f' = \mathcal{L}((1, 1, 1)_{\mathcal{A}}, (1, 0, 0)_{\mathcal{A}})$ quindi $Im\ f' = \mathcal{L}(v_1 + v_2 + v_3, v_1) \subset \mathbb{R}^4 \Rightarrow dimKerf' = 1 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 3x \\ y = -4x \end{cases}$$

Detta $\mathcal{B}$ una base del $Kerf'$ essa è composta dal vettore $\mathcal{B} = \{(1, -4, 3)_{\mathcal{A}}\} = \{v_1 - 4v_2 + 3v_3\}$.
Se $h = -1 \Rightarrow \rho(M^{\mathcal{A}}(f')) = 2 \Rightarrow dimIm\ f' = 2 \Rightarrow Im\ f' = \mathcal{L}((1, 1, -1)_{\mathcal{A}}, (1, 0, 0)_{\mathcal{A}})$ quindi $Im\ f' = \mathcal{L}(v_1 + v_2 - v_3, v_1) \subset \mathbb{R}^4 \Rightarrow dimKerf' = 1 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$$

Detta $\mathcal{B}$ una base del $Kerf'$ essa è composta dal vettore $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1)_{\mathcal{A}}\} = \{v_1 - v_3\}$.

3) Se $h = -1$ si ha che

$$M^{\mathcal{A}}(f') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$P.C.(T) = (1 - T)^2(-T) \Rightarrow T = 1$ con $m_1 = 2$, $T = 0$ con $m_0 = 1$.Calcoliamo la dimensione dell'autospazio associato all'autovalore 1: $dimV_1 = 3 - \rho(M^{\mathcal{A}}(f') - 1I) = 2 \Rightarrow f'$ è semplice.

4) Nel caso $h = -1 \Rightarrow$ una base del $Kerf'$ è composta da $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1)_{\mathcal{A}}\} = \{v_1 - v_3\} \Rightarrow g(0, 0, -2, 0) = (0, 0, 0, 0)$. Chiamiamo $\mathcal{C}$ la base di V formata dai vettori $u_1 = (0, 0, -2, 0), u_2 = (3, 2, -1, 0), u_3 = (1, 0, 0, 0)$. Procedendo in modo classico per trovare $M^{\mathcal{C}}(g)$ (cioè trovando le componenti delle immagini di g rispetto alla nuova base $\mathcal{C}$) si ottiene la seguente matrice

$$M^{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$P.C.(T) = (2 - T)(-T)(-1 - T) \Rightarrow T = -1$ con $m_1 = 1$, $T = 0$ con $m_0 = 1$, $T = 2$ con $m_2 = 1$. $\Rightarrow$ tre autovalori distinti quindi g è semplice. Calcoliamo una base di autovettori. Iniziamo dall'autospazio associato all'autovalore -1:

$$V_{-1} = Kerf_{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$V_{-1} = \{(2y, y, 3y)_{\mathcal{C}}\} \Rightarrow w_1 = (2,1,3)_{\mathcal{C}}$. In modo analogo calcoliamo $V_0 = \{(x,0,0)_{\mathcal{C}}\} \Rightarrow w_2 = (1,0,0)_{\mathcal{C}}$ e $V_2 = \{(2y,y,0)_{\mathcal{C}}\} \Rightarrow w_3 = (2,1,0)_{\mathcal{C}}$. Ovviamente la base di autovettori scelta è formata da $\{w_1, w_2, w_3\}$. Quindi la matrice diagonale è

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e la matrice diagonalizzante è

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

5) Data la retta r di equazione $x - hy + hz = x + 2y = 0$ e la retta s di equazione $2x + 3hz - 5 = 4y - 3hz + 5 = 0$, determinare il piano che le contiene e trovare i valori di h per cui esse sono parallele.

6) Determinare e studiare il fascio ϕ di coniche del piano $z = 0$ di equazione

$$(h+1)x^2 + (h+1)y^2 + xy + 3x + 3y + 7 = 0.$$

Detta Γ l'iperbole equilatera di ϕ, determinare il suo centro e i suoi assi di simmetria. Trovare l'equazione canonica di Γ.

7) Tra la quadriche contenenti Γ determinare la quadrica Q passante per i punti $(-1,1,1)$, $(0,1,1,0)$, contiene la retta $t = y - z = 0$ e passa per il punto $(0,-2,1)$. Studiare la conica sezione di Q con il piano $x + y = 0$.

Risoluzione

1) La retta r e la retta s hanno come piano in comune $x+2y = 0$, poichèse sommiamo la prima e la seconda equazione della retta s troviamo esattamente questo piano.Inoltre i parametri direttori di r sono: se $h \neq 0 \Rightarrow (-2, 1, \frac{2+h}{h})$, se $h = 0 \Rightarrow (0,0,1)$. In modo analogo i parametri direttori di s sono: se $h \neq 0 \Rightarrow (-6h, 3h, 4)$, in particolare se $h = 0$ diventano $(0,0,4)$. Quindi $h = 0$ è un valore per cui r ed s sono parallele. Imponendo che le due terne dei parametri direttori delle due rette devono essere proporzionali con coefficiente di proporzionalità ρ si ottiene $\rho = \frac{1}{3h}$ e $h = -\frac{2}{3}$.

2)
$$B = \begin{pmatrix} h+1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & h+1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 7 \end{pmatrix}$$

$detB = 0$ per $h = -\frac{1}{2}, -\frac{6}{7} \Rightarrow$ coniche spezzate;$detB \neq 0$ per $h \neq -\frac{1}{2}, -\frac{6}{7} \Rightarrow$ coniche irriducibili;$detA = (h+1)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow h = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ Parabola. Se $h < -\frac{3}{2}, h > -\frac{1}{2}$ si hanno ellissi. Se $-\frac{3}{2} < h < -\frac{1}{2}$ si hanno iperboli.

In particolare iperbole equilatera si ottiene quando la $Tr(A) = 0 \Rightarrow h = -1$.

$$\Gamma: \; xy + 3x + 3y + 7 = z = 0.$$

Il centro si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases}$$

Gli autovalori della matrice A sono $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$. Inoltre da $\gamma = -\frac{detB}{\alpha\beta} \Rightarrow \gamma = 2$.Possiamo quindi scrivere la forma canonica dell'iperbole equilatera

$$\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 = 2 \Rightarrow \frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1.$$

Sapendo che i coefficienti angolari degli assi sono ± 1 e passano per il centro $C = (-3, -3)$ ne segue che hanno equazioni rispettivamente $x - y = z = 0$ e $x + y + 6 = z = 0$.

3) Scriviamo la quadriche contenenti Γ:

$$z(ax + by + cz + d) + xy + 3x + 3y + 7 = 0.$$

Imponendo il passaggio per il punto (-1,1,1) si ottiene la condizione $a = b+c+d+6$. Imponendo il passaggio per il punto improprio (0,1,1,0) (portare l'eqauizione delle quadriche in cooordinate omogeneee) si ottiene la condizione $b+c = 0$. Quindi $a = d+6$, $b = -c$. Sostituendo le equazioni della retta (puno generico di essa) nell'equazione delle quadriche $(d+6)xz - cyz + cz^2 + dzt + xy + 3xt + 3yt + 7t^2 = 0$ si ottiene $(d+6)xz + xz = 0$ e imponendo l'identità con lo zero risulta $d = -7$.Imponiamo infine il passaggio per (0,-2,1) e abbiamo che $c = 2$. Ne segue quindi che la quadrica $\mathcal{Q}$ è data dalla seguente equazione:

$$2z^2 - xz - 2yz - 7z + xy + 3x + 3y + 7 = 0$$

Infine la conica sezione è data dal sistema

$$\begin{cases} 2z^2 - xz - 2yz - 7z + xy + 3x + 3y + 7 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Per studiare questa conica dobbiamo calcolare i suoi punti impropri:

$$\begin{cases} 2z^2 + xz - x^2 = 0 \\ x + y = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 - q - 2 = 0 \\ x + y = 0 \\ t = 0 \\ q = \frac{x}{z} \end{cases}$$

$\Rightarrow q = -1, 2 \Rightarrow$ due punti impropri reali e distinti $\Rightarrow$ Iperbole.