# CdL in Ingegneria Gestionale

Risoluzione della prova scritta di **Algebra lineare e geometria**- 25 Febbraio 2008

## I

Si consideri l'endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\varphi(x, y, z) = (x,\ x - (h+2)y,\ x + y + hz)$$

con $h$ parametro reale.

1) Studiare l'endomorfismo $\varphi$ al variare di $h$ determinando in ciascun caso una base di $Im\ \varphi$, una base di $Ker\ \varphi$ e le loro equazioni cartesiane.

2) Calcolare, al variare di $h$, la controimmagine

$$\varphi^{-1}(h, h+1, 2h+1) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(v) = (h, h+1, 2h+1)\}$$

.

3) Studiare la semplicità di $\varphi$ al variare di $h$.

4) Nel caso $h = -1$ verificare che l'endomorfismo $\varphi$ è invertibile e determinare l'applicazione inversa $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

*Risoluzione*

1) Scriviamo la matrice associata all'endomorfismo $\varphi$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Calcoliamo $\varphi(e_1) = \varphi(1,0,0) = (1,1,1)$, $\varphi(e_2) = \varphi(0,1,0) = (0, -(h+2), 1)$, $\varphi(e_3) = \varphi(0,0,1) = (0,0,h)\ \Rightarrow$

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -(h+2) & 0 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il rango di questa matrice:
se $h \neq 0, -2 \Rightarrow \rho(M^{\mathcal{A}}(f')) = 3 \Rightarrow dimIm\ \varphi = 3 \Rightarrow Im\ \varphi = \mathbb{R}^3 \Rightarrow dimKer\ \varphi = 0$.
se $h = 0\ \Rightarrow \rho(M(\varphi)) = 2 \Rightarrow dimIm\varphi = 2 \Rightarrow Im\varphi = \mathcal{L}((1,1,1),(0,-2,1))$ quindi l'equazione cartesiana di $Im\ \varphi$ è data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

Il rango di questa matrice non deve essere massimo, cioè il suo determinante deve essere nullo, $\Rightarrow 3x - y - 2z = 0$. Inoltre $dimKer\varphi = 1 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Detta $\mathcal{B}$ una base del $Ker\varphi$ essa è composta dal vettore $\mathcal{B} = \{(0,0,1)\}$.
se $h = -2 \ \Rightarrow \rho(M(\varphi)) = 2 \Rightarrow dimIm\varphi = 2 \Rightarrow Im\varphi = \mathcal{L}((1,1,1),(0,0,-2)$ quindi l'equazione cartesiana di $Im\ \varphi$ è data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

Il rango di questa matrice non deve essere massimo, cioè il suo determinante deve essere nullo, $\Rightarrow x - y = 0$. Inoltre $dimKer\varphi = 1 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \end{cases}$$

Detta $\mathcal{B}$ una base del $Ker\varphi$ essa è composta dal vettore $\mathcal{B} = \{(0,2,1)\}$.

2) Se $h \neq 0, -2$ si ha che il sistema lineare di tre equazioni in tre incognite ammette una sola soluzione:

$$\begin{cases} x = h \\ x - (h+2)y = h + 1 \\ x + y + hz = 2h + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = h \\ y = -\frac{1}{h+2} \\ z = \frac{h^2+3h+3}{h(h+2)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi^{-1}(h, h+1, 2h+1) = (h, -\frac{1}{h+2}, \frac{h^2+3h+3}{h(h+2)})$. Se $h = 0, -2$ si vede che il sistema è impossibile quindi i vettori $(0,1,1)$ $(-2,-1,-3)$ non provengono da nessun vettore di $\mathbb{R}^3$.

3) Semplicità di $\varphi$ : poichè la matrice dell'endomorfismo è triangolare gli autovalori sono direttamente i valori della diagonale principale. Ne segue che $T = 1$, $T = -h - 2$, $T = h$. Se $h \neq 1,\ h \neq -1,\ h \neq -2 \Rightarrow$ tre autovalori distinti quindi $\varphi$ è semplice.

Se $h = 1$, gli autovalori sono:
$T = 1$ con $m_1 = 2$
$T = -3$ con $m_{-3} = 1$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio associato all'autovalore 1: $dim\ V_1 = 3 - \rho(M(\varphi) - I) = 3 - 2 = 1$ quindi l'endomorfismo non è semplice.

Se $h = -1$, gli autovalori sono:
$T = 1$ con $m_1 = 1$
$T = -1$ con $m_{-1} = 2$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio associato all'autovalore -1: $dim\ V_{-1} = 3 - \rho(M(\varphi) + I) = 3 - 2 = 1$ quindi l'endomorfismo non è semplice.

Se $h = -3$, gli autovalori sono:
$T = 1$ con $m_1 = 2$

$T = -3$ con $m_{-3} = 1$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio associato all'autovalore 1: $dim\ V_{-1} = 3 - \rho(M(\varphi) - I) = 3 - 2 = 1$ quindi l'endomorfismo non è semplice.

4) Nel caso $h = -1$ $\varphi$ è invertibile perchè dallo studio si era trovato che $\varphi$ era isomorfismo quando $h \neq 0, -2$. Poichè si dimostra che la matrice associata all'applicazione inversa è la matrice inversa della $M(\varphi)$, bisogna calcolare $M^{-1}(\varphi)$.

$$M^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

## II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

5) Siano date le rette sghembe $r$ e $s$ ed un piano $\pi$ di equazioni rispettivamente

$$r : \begin{cases} x = 3 \\ y = 2z \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 1 = 0 \\ z - 2y = 0 \end{cases} \qquad \pi :\ 2x - y + z + 4 = 0$$

Determinare
a) l'equazione del piano $\alpha$ contenente la retta $r$ e parallelo alla retta $s$
b) l'equazione del piano $\beta$ passante per i punti $A = r \cap \pi$, $B = s \cap \pi$ e ortogonale a $\pi$.

6) Determinare e studiare il fascio $\phi$ di coniche del piano $z = 0$ che passano per $O$ con tangente $x - y = 0$ e per $C = (1, 0)$ con tangente $x - 1 = 0$.

7) Detta $\rho$ la parabola del fascio determinare la quadrica avente $\rho$ come direttrice e vertice $Z^\infty = (0, 0, 1, 0)$.

8) Dette $\Theta$ la quadrica di equazione $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e $\Sigma$ la quadrica di equazione $xz = 0$ trovare e studiare il fascio di quadriche individuato da $\Theta$ e $\Sigma$.

*Risoluzione*

1) La retta $r$ ha parametri direttori $(0, 2, 1)$.
La retta $s$ ha parametri direttori $(0, 1, 2)$.
Il piano $\pi$ ha parametri direttori $(2, -1, 1)$.

a) L'equazione del piano $\alpha$ contenente la retta $r$ è

$$x - 3 + \lambda(y - 2z) = 0$$

affichè sia parallelo alla retta $s$ deve accadere che i rispettivi vettori direttivi siano ortogonali $\rightarrow (1, \lambda, -2\lambda) \cdot (0, 1, 2) = 0 \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow$ il piano $\alpha$ ha equazione $x - 3 = 0$.

b) L'equazione del piano $\beta$ passante per $A = (3, 20, 10)$ e per $B = (-1, -2, -4)$ e ortogonale a $\pi$ deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 3a + 20b + 10c + d = 0 \\ -a - 2b - 4c + d = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = -\frac{3c}{4} \\ b = -\frac{c}{2} \\ d = \frac{9c}{4} \end{cases}$$

il piano $\beta$ ha equazione $3x + 2y - 4z - 9 = 0$.

2) Determiniamo il fascio di coniche usando la bitangenza al variare di $\lambda$ e $\mu$ non entrambi nulli:

$$\lambda(x - y)(x - 1) + \mu y^2 = z = 0.$$

Supponendo $\lambda \neq 0$, dividiamo l'equazione del fascio per $\lambda$ e poniamo $h = \frac{\mu}{\lambda} \rightarrow$ l'equazione del fascio diventa

$$(x - y)(x - 1) + hy^2 = 0.$$

$detB = -\frac{h}{4},\ detA = h - \frac{1}{4}$.
Quindi se $h = 0 \rightarrow \rho = 2$ è la conica spezzata nelle due rette tangenti date nel testo.
Se $h \neq 0 \rightarrow \rho = 3 \rightarrow h > \frac{1}{4}$ si hanno ellissi, se $h = \frac{1}{4}$ si ha una parabola, se $h < \frac{1}{4}$ si hanno iperboli.

3) Laparabola del fascio si ottiene per $h = \frac{1}{4}$ :

$$\rho: \ (x - y)(x - 1) + \frac{1}{4}y^2 = z = 0 \rightarrow 4x^2 + y^2 - 4xy - 4x + 4y = z = 0.$$

L'equazione delle quadriche contenenti la parabola $\rho$ è data

$$z(ax + by + cz + d) + 4x^2 + y^2 - 4xy - 4x + 4y = 0.$$

La matrice associata a tale equazione è

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & \frac{a}{2} & -2 \\ -2 & 1 & \frac{b}{2} & 2 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2} \\ -2 & 2 & \frac{d}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ imponendo che $(1, 1, 0)$ sia vertice deve accadere

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & \frac{a}{2} & -2 \\ -2 & 1 & \frac{b}{2} & 2 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2} \\ -2 & 2 & \frac{d}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Il cilindro parabolico ha equazione

$$4x^2 + y^2 - 4xy - 4x + 4y = 0.$$

4) Note due quadriche, il fascio individuato da esse ha equazione al variare di $\lambda$ e $\mu$ non entrambi nulli:

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2y) + \mu xz = 0.$$

Supponendo $\lambda \neq 0$, dividiamo l'equazione del fascio per $\lambda$ e poniamo $k = \frac{\mu}{\lambda} \to$ l'equazione del fascio diventa

$$x^2 + y^2 - 2y + kxz = 0.$$

La matrice associata a tale equazione è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{k}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to det(B) = \frac{k^2}{4},\ det(A) = -\frac{k^2}{4}$$

Se $k \neq 0 \to$ quadriche non degeneri$\to$. Dai segni dei coefficienti del polinomio caratteristico della sottomatrice $A$

$$-T^3 + 2T^2 + (\frac{k^2}{4} - 1)T - \frac{k^2}{4} = 0$$

si vede che o sono a segni alternati (ellissoidi) oppure si tratta di iperboloidi iperbolici (dato che $det(B) > 0$). Si nota immediatamente che $-\frac{k^2}{4} > 0$ impossibile $\to$ iperboloidi iperbolici.
Se $k = 0 \to$ quadrica degenere e si intuisce immediatamente che si tratta di un cilindro ellittico.