

**Università degli Studi di Catania**  
**CdL in Ingegneria Civile e Ambientale**

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 20 Settembre 2019

---

*Durata della prova: tre ore.*

*È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.*

*Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta. È vietato consultare libri o appunti.*

---

**I**

Sia  $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = z - x\}$  e sia  $f : V \rightarrow V$  l'endomorfismo di  $V$  definito al variare di  $h \in \mathbb{R}$  da:

$$\begin{cases} f(0, 1, 0, 0) = (h - 1, h - 1, 2h - 2, h - 1) \\ f(1, -1, 2, 1) = (1 - h, h - 1, 2 - 2h, 1 - h) \\ f(1, 0, 0, -1) = (-1, -1, 0, 1) \end{cases}$$

1. Studiare l'endomorfismo  $f$  al variare di  $h$ , determinando in ogni caso  $\text{Ker } f$  e  $\text{Im } f$ .
2. Studiare la semplicità di  $f$ , al variare di  $h \in \mathbb{R}$ , determinando, se possibile, una base di autovettori.
3. Calcolare, al variare di  $h \in \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(h - 1, h - 1, 2h - 2, h - 1)$ .
4. Per  $h = -1$  determinare l'endomorfismo  $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che la restrizione  $\varphi|_V$  induce  $f$  e  $\text{Ker } \varphi = \mathcal{L}((1, 0, 0, 0))$ .

**II**

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$ .

- 1) Dati i punti  $A = (1, 0, -1)$ ,  $B = (0, 1, 1)$ ,  $C = (-1, 1, 1)$ , determinare il piano  $\pi$  che li contiene. Data la retta  $r : x - y + 1 = y - z = 0$ , determinare la retta simmetrica di  $r$  rispetto a  $\pi$ .
- 2) Determinare e studiare il fascio di coniche del piano  $z = 0$  tangenti a  $s : x + y - 1 = 0$  nel punto  $P_1 = (1, 0)$  e a  $t : 2x - y - 1 = 0$  nel punto  $P_2 = (1, 1)$ . Determinare gli asintoti dell'iperbole equilatera del fascio.
- 3) Studiare, al variare del parametro reale  $k$ , le quadriche di equazione:

$$kx^2 + y^2 - 2hxz + 2y - 4kx + 2 - k = 0.$$