

Università degli Studi di Catania

CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 18 Febbraio 2019

Durata della prova: tre ore.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $v_1 = (1, -1, 0, 1)$, $v_2 = (0, -1, 3, 0)$, $v_3 = (0, 1, 2, 1)$, $v_4 = (2, -2, 5, 3)$.

- 1) Posto $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$, determinare la dimensione di V , una sua base e le sue equazioni cartesiane.
- 2) Dati $u_1 = (0, 0, 5, 1)$, $u_2 = (1, 0, -3, 0)$, $u_3 = (0, -1, 8, 0)$ verificare che $\mathcal{A} = [u_1, u_2, u_3]$ è una base di V . Data l'applicazione lineare $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(u_1) = (h, 1, h-1)$$

$$f(u_2) = (1, -h, 1)$$

$$f(u_3) = (0, -h, 0),$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$ studiare f al variare di h determinando in particolare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{A}$ di V e alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

- 3) Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(2, 3, -1)$.
- 4) Diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

determinando la matrice diagonale D e la matrice diagonalizzante P tale che $P^{-1}BP = D$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

- 1) Data la retta

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

e $P = (-1, 0, 1)$ determinare il luogo delle rette passanti per P che formano con r un angolo di $\frac{\pi}{4}$.

- 2) Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ passanti per i punti $A = (1, 1)$, $B = (1, 2)$ e $P_\infty = (1, 1, 0)$ e tangenti alla retta $t : x - y - 2 = 0$
- 3) Studiare, al variare del parametro reale h , il fascio θ delle quadriche di equazione

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2hyz - 2z + h = 0$$