

CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 11 Settembre 2018

Durata della prova: tre ore.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

È vietato consultare libri o appunti.

I

Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^4 sono assegnati i vettori $v_1 = (0, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 2, 2, 2)$. ed i sottospazi $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ e :

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y = x + y - 3z - 3t = 0\}.$$

1. Determinare $V \cap W$ e $V + W$, specificando se la somma è diretta o meno.

2. Data l'applicazione lineare $f: V \rightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(v_1) = (h + 1, 0, -h - 1, h^2 + h)$$

$$f(v_2) = (h + 3, -1, 2, h^2 + 2h + 1)$$

$$f(v_3) = (2, 1, h + 1, -2),$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$ studiare f al variare di h determinando in ciascun caso $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$.

3. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale f induce un endomorfismo $g: V \rightarrow V$.

4. Per tale valore di h studiare la semplicità di g , determinando, se possibile, una base di autovettori.

5. Determinare l'endomorfismo $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la cui restrizione a V induce g e per il quale W è autospazio associato all'autovalore 2.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Determinare il piano π che contiene i punti :

$$P = (-1, 1, 0), Q = (1, 0, 1), R = (1, -1, 1).$$

Data la retta

$$\mathbf{u} : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

determinare la retta simmetrica di u rispetto a π .

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti alla retta $r: x + y = 0$ nel punto $A = (1, -1)$ e a $s: 2x - y = 0$ nel punto $B = (1, 2)$. Determinare gli asintoti dell'iperbole equilatera del fascio.

3. Determinare l'equazione del cono avente vertice in R e per direttrice l'unica parabola p del fascio .