Ingegneria Civile e Ambientale, appello di **Algebra Lineare e Geometria** del 10/9/15.

I

1) Studiare l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ associato alla matrice

$$A = M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & 1 \\ 1 & h+1 & 1 \\ h & -h & 0 \\ 1 & h & 2 \end{pmatrix} \quad \text{con } h \text{ parametro reale}$$

al variare di h, determinando in ogni caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2) Determinare la controimmmagine $f^{-1}(2,2,0,1)$ al variare del parametro h.
3) Si consideri la proiezione $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ data da $p(x, y, z, t) = (x, y, t)$. Studiare l'endomorfismo $\varphi = p \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ al variare di h, determinando in ogni caso $\operatorname{Ker} \varphi$ e $\operatorname{Im} \varphi$.
4) Verificare che $T = 1$ è autovalore di φ. Nei casi in cui φ è semplice determinare una base di autovettori.

II

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart. ort $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u$.
1) Date **r** ed **s**:

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{s} : \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

si determini il piano π che congiunge la retta **r** con un punto $S \in \mathbf{s}$. Verificare che π non dipende dalla scelta del punto $S \in \mathbf{s}$. Determinare il fascio dei piani passanti per O ed ortogonali a π e trovare l'asse **t** di questo fascio.
2) Sul piano $z = 0$ studiare il fascio ϕ di coniche di equazione

$$\phi : \; f(x, y) = x^2 - 2hxy + y^2 + x + y = 0$$

determinando in particolare le coniche spezzate ed i punti base di ϕ. Trovare l'asse di simmetria ed il vertice della parabola del fascio.
3) Trovare e studiare la famiglia di quadriche che contengono le coniche

$$C_1 : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 - x - y = 0 \end{cases} ; \qquad C_2 : \begin{cases} x - y = 0 = 0 \\ x^2 + z^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

SCOLGIMENTO, I

1) Riducendo la matrice A avremo

$$A \to \begin{pmatrix} h+1 & 1 & 1 \\ -h & h & 0 \\ h & -h & 0 \\ -2h-1 & h-2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{h\neq 0} \begin{pmatrix} h+1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -h-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi se $h \neq 0, -3$ f è iniettiva e $\operatorname{Im} f$ è lo spazio generato dalle colonne di A. Consideriamo i casi particolari.
$h = 0$: $\operatorname{Ker} f = \{(-2x, x, x)\}$, $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0))$.

$h=-3$: $\operatorname{Ker} f=\{(x,x,x)\}$, $\operatorname{Im} f=\mathscr{L}((1,1,0,2),(1,-2,3,-3))$.
2) Ripetendo la riduzione precedente per la matrice completa, avremo

$$(A,B)\to\begin{pmatrix} h+1 & 1 & 1 & | & 2\\ -h & h & 0 & | & 0\\ h & -h & 0 & | & 0\\ -2h-1 & h-2 & 0 & | & -3\end{pmatrix}\overset{h\neq 0}{\to}\begin{pmatrix} h+1 & 1 & 1 & | & 2\\ -1 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\\ -h-3 & 0 & 0 & | & -3\end{pmatrix}.$$

Quindi se $h\neq 0,-3$ si ha $\rho(A)=\rho(A,B)=3$, il sistema ammette una sola soluzione e $f^{-1}(2,2,0,1)=\{(\frac{3}{h+3},\frac{3}{h+3},\frac{-h}{h+3})\}$. Consideriamo i casi particolari.
$h=0$: $\rho(A)=\rho(A,B)=2$, ci sono ∞^1 soluzioni e $f^{-1}(2,2,0,1)=\{(3-2y,y,y-1)\}$;
$h=-3$: $2=\rho(A)<\rho(A,B)=3$, il sistema è impossibile quindi $f^{-1}(2,2,0,1)=\varnothing$.
3) Osservando che $\varphi(e_1)=p(h+1,1,h,1)=(h+1,1,1)$ e che lo stesso procedimento si può usare per e_2 ed e_3, si trova facilmente

$$A'=M(\varphi)=\begin{pmatrix} h+1 & 1 & 1\\ 1 & h+1 & 1\\ 1 & h & 2\end{pmatrix}\quad \text{con}\quad |A'|=h(h+3).$$

quindi se $h\neq 0,-3$ φ è un isomorfismo; nei casi particolari $h=0,-3$ si ha $\operatorname{Ker}\varphi=\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im}\varphi=p(\operatorname{Im} f)$.
4) Si verifica facilmente che $T=1$ è un autovalore di φ in quanto $\rho(A'-I)=2$. Quindi possiamo evitare il calcolo esplicito del polinomio caratteristico:

$$P(T)=-T^3+(2h+4)T^2+\lambda T+h^2+3h;\quad P(1)=0\ \Rightarrow\ \lambda=-h^2-5h.$$

Ora si trovano facilmente gli autovalori $T=1$, h, $h+3$; se $h\neq -2,1$ questi autovalori sono distinti quindi φ è semplice. In questi casi troviamo gli autospazi.

- $T=1$, $\quad V_1=\{(x,x,-(h+1)x)\}$ con base $u_1=(1,1,-h-1)$;
- $T=h$, $\quad V_h=\{(-2z,z,z)\}$ con base $u_2=(-2,1,1)$;
- $T=h+3$, $\quad V_{h+3}=\{(x,x,x)\}$ con base $u_3=(1,1,1)$.

Si verifica facilmente che gli autovettori u_1, u_2, u_3 sono indipendenti, di conseguenza φ è semplice, per $h\neq -2$ mentre per $h=-2$ φ non è semplice.

II

1) Nel fascio di piani che ha per asse la retta $\mathbf{r}$ cerchiamo il piano passante per il punto generico S di $\mathbf{s}$:

$$\varphi_r: x-2y-3+h(y+z+1)=0,\quad S\equiv(-2\gamma,-\gamma-2,\gamma)\ \Rightarrow\ h=1$$

quindi troviamo il piano $\pi: x-y+z-2=0$, indipendentemente dal parametro γ, cioè dal punto $S\in\mathbf{s}$. La direzione della retta $\mathbf{t}$ cercata è data dal vettore normale di $\pi:\ n=(1,-1,1)$, quindi questa retta ha equazioni $\mathbf{t}:\ x+y=x-z=0$. Il fascio φ_t ha equazione $(1+h)x+y-hz=0$ ed ovviamente il suo asse è la retta t.
2) Osserviamo che le coniche del fascio sono simmetriche rispetto alla prima bisettrice in quanto $f(x,y)=f(y,x)$. Dalla matrice associata si ha:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -h & \frac12\\ -h & 1 & \frac12\\ \frac12 & \frac12 & 0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad \begin{array}{l}|B|=-\frac{h+1}{2}\\ |A|=1-h^2\end{array}$$

quindi si hanno due coniche spezzate distinte:
$h = -1: \quad (x+y)(x+y+1) = 0;$
$h = \infty: \quad xy = 0.$
Secando queste due coniche si trovano facilmente i punti base: $(0,-1)$, $(-1,0)$ e $(0,0)$ contato due volte. Per le coniche irriducibili avremo

- $|A| > 0 \quad -1 < h < 1$: ELLISSI. Per $h = 0$ si ha la circonferenza $x^2 + y^2 + x + y = 0$;
- $|A| < 0 \quad h < -1$, $h > 1$: IPERBOLI. Non ci sono iperboli equilatere;
- $|A| = 0 \quad h = \pm 1$: per $h = 1$ si ha la parabola $(x-y)^2 + x + y = 0$.

Come abbiamo visto, l'asse di simmetria della parabola è la prima bisettrice $x - y = 0$; secando la parabola col suo asse si trova il vertice $O \equiv (0,0)$.
3) Osserviamo che C_1 è una parabola e C_2 è un'ellisse. Tra le quadriche che contengono queste coniche non possono esserci ellissoidi, paraboloidi iperbolici o cilindri. Sechiamo la generica quadrica contenente C_1 col piano di C_2, $x = y$:

$$\begin{cases} z(ax+by+cz+d) + x^2 - x - y = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (a+b)xz + cz^2 - 2x + dz = 0 \\ y = x \end{cases} \equiv C_2$$

per cui dovremo avere $a + b = 0$, $c = 1$, $d = 0$ e troviamo la famiglia di quadriche

$$Q: \; x^2 + axz - ayz + z^2 - x - y = 0 \quad \text{con } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{a}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e si trovano facilmente $|B| = \frac{1}{4}(a^2 - 1)$, $|A| = -\frac{a^2}{4}$. Consideriamo i casi particolari:

- $a = \pm 1$: si hanno due coni, di vertice $(2,2,0)$;
- $a = 0$: si ha un paraboloide ellittico, di equazione $x^2 + z^2 - x - y = 0$.

Per le quadrice non degeneri avremo:

- $a < -1$, $a > 1$, $|B| > 0$: iperboloidi iperbolici;
- $-1 < a < 1$, $a \neq 0$, $|B| < 0$: iperboloidi ellittici.