

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 4 settembre 2019

Durata della prova: tre ore.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Sia $f_h : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare definita dalla legge

$$f_h(x, y, z, t, u) = (y, z, t, u, hx), \quad h \in \mathbb{R}.$$

- 1) Calcolare gli autospazi di f_h e dire se f_h è diagonalizzabile.
- 2) Sia V il sottospazio di \mathbb{R}^5 generato dai vettori

$$(2, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1, 1), (0, 2, -1, 2, 0).$$

Determinare un sistema minimale di equazioni cartesiane per V .

- 3) Determinare la dimensione ed una base del sottospazio $W_h = f_h(V) \cap V \subseteq \mathbb{R}^5$.
- 4) Determinare $\text{Ker}(f_h \circ f_h)$ e $\text{Ker}(f_{h+1} \circ f_h)$.

II

Sia assegnato sullo spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

- 1) Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la conica di equazioni

$$z = (x + hy + 1)^2 + (2x + y + 1)^2 - 1 = 0$$

- 2) Nel caso $h = -2$ determinare la sua eccentricità.
- 3) Determinare il cono Q di vertice $V(0, 1, 1)$ contenente la conica $z = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$. Determinare i piani, passanti per la retta r di equazioni $z = x - y = 0$, che intersecano Q in una parabola.
- 4) Determinare la sfera tangente alla retta r in $O(0, 0, 0)$ ed al piano $x + y + z - 2 = 0$ in V .