

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA  
ANNO ACCADEMICO 2011-2012

Prova scritta di **Analisi Matematica III (6 CFU)**

(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)  
Seconda sessione - I appello - 29 Giugno 2012

---

- 1) Non si possono consultare libri o appunti.
  - 2) Tempo: due ore.
- 

I

Detto  $X$  il dominio di  $\mathbb{R}^3$  definito dalle limitazioni:

$$x^2 + y^2 \leq z^2, \quad 1 \leq z \leq 2,$$

determinarne il volume, le coordinate:

$$x_0 = \frac{1}{\text{vol } X} \iiint_X x \, dx dy dz, \quad y_0 = \frac{1}{\text{vol } X} \iiint_X y \, dx dy dz, \quad z_0 = \frac{1}{\text{vol } X} \iiint_X z \, dx dy dz$$

del baricentro ed il momento d'inerzia rispetto all'origine  $O$ :

$$I_O = \iiint_X (x^2 + y^2 + z^2) \, dx dy dz.$$

II

Sia  $\Omega$  l'aperto di  $\mathbb{R}^2$  definito dalle limitazioni:

$$x > -1, \quad y > -1.$$

Di quali delle seguenti forme differenziali:

$$2xy \, dx + x^2 \, dy, \quad x^2 \, dx + 2xy \, dy, \quad \frac{y}{y+2} \, dx + \frac{2x}{(y+2)^2} \, dy, \quad \cos(x^2 + y^2) \, dx + (x^2 + y^2) \, dy,$$

la funzione  $F(x, y) = \frac{xy}{y+2}$  è primitiva in  $\Omega$ ?

Dire quali delle precedenti forme differenziali sono esatte in  $\Omega$  e per quelle esatte determinarne le primitive.

III

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' = -y' + x^2 + x + 1 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$$