

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2006-2007

Prova scritta di **Analisi Matematica II**

(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)

Terza sessione - I appello - 7 Settembre 2007

-
- 1) Non si possono consultare libri o appunti.
 - 2) Tempo: tre ore.
-

I

Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 x^2 [2 - \log(1 + 2x)] dx .$$

II

Studiare la convergenza puntuale delle seguenti serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n}\right)^{n+1} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 + n}{n^2} .$$

III

Siano $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ e $g(x, y)$ la funzione definita in \mathbb{R}^2 dalla legge:

$$g(x, y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen} \frac{x}{y} & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus X \\ 0 & \text{se } (x, y) \in X . \end{cases}$$

Provare che:

- i) la funzione $g(x, y)$ ammette derivate parziali prime in ogni punto di \mathbb{R}^2 ;
- ii) le derivate parziali seconde miste della $g(x, y)$ in $(0, 0)$ esistono e sono tra loro diverse.

IV

Sia f la funzione reale definita dalla legge:

$$f(x, y) = \log \frac{xy}{x+y} .$$

Determinare

- j) l'insieme A di esistenza di f ;
- jj) gli estremi inferiore e superiore di f in A ;
- jjj) gli eventuali punti di minimo e di massimo relativi di f in A ;
- jjv) i punti di minimo e di massimo assoluti di f in $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x\}$.