Università degli Studi di Catania
Corso di laurea in Ingegneria Elettronica
Prova di Analisi Matematica II
18 Giugno 2015

`Durata della prova: 30 minuti.`

1

Svolgere UNO dei seguenti quesiti

I. Siano A un aperto di $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in A$. Dare le definizioni di derivabilità parziale e di differenziabilità di f in (x_0, y_0). Enunciare il teorema sul differenziale totale. Portare un esempio di funzione continua in un punto ma in tale punto non differenziabile.

II. Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua in A e $(x_0, y_0) \in A$. Spiegare cosa significa risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \,. \end{cases} \tag{1}$$

Scrivere l'equazione di Volterra relativa a f e al punto (x_0, y_0). Spiegare la relazione che intercorre tra l'equazione di Volterra ed il problema di Cauchy (1).

2

Dimostrare UNO dei seguenti teoremi

I. Sia A un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ di classe $C^2(A)$. Se $x_0 \in A$ è un punto di minimo relativo per f provare che

- $\nabla f(x_0) = 0$;
- la forma quadratica associata alla matrice hessiana di f nel punto x_0 è maggiore o uguale a 0.

II. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni definite nell'intervallo (a, b). Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, f_n continua in $x_0 \in (a, b)$. Sia la successione $\{f_n\}$ uniformemente convergente in (a, b) a f. Provare che f è continua in x_0.

`Durata della prova: 90 minuti.`

1

Studiare in $\mathbb{R}$ la convergenza puntuale e la convergenza uniforme della seguente successione di funzioni

$$\left\{ \frac{\arctan |x|^n}{\sqrt{n+1}} \right\} .$$

2

Dopo aver trovato l'insieme di definizione D della funzione

$$f(x,y,z) = \log z[1 - x^2 - y^2 - (z-1)^2]\,,$$

determinare gli eventuali punti di minimo e di massimo relativo di f in D.

3

Risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 8y_2 \\ y_2' = -2y_1 + y_2\,. \end{cases}$$