

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2007-2008

Prova scritta di **Analisi Matematica III**

(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)

Seconda sessione - II appello - 18 Luglio 2008

1) Non si possono consultare libri o appunti.

2) Tempo: due ore.

I

Provare che le due curve piane di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \sin t \cos t \\ y = \sin^2 t \end{cases} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin t \cos t \end{cases} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

sono regolari ed hanno la stessa lunghezza.

II

Siano a, b, c tre numeri reali positivi, T' la “scodella di Galileo” definita dalle limitazioni:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \geq 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad -c \leq z \leq 0,$$

e T'' il cono:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z^2}{c^2}, \quad -c \leq z \leq 0,$$

di base l'ellisse, del piano $z = -c$, di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ e con vertice nell'origine $O \equiv (0, 0, 0)$.

Provare che

- i) le sezioni di T' e T'' con piani paralleli al piano $z = 0$ hanno aree uguali;
- ii) $\text{vol} T' = \text{vol} T'' = \frac{1}{3} \pi abc$.

III

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{x(x+1)} y = \frac{\arcsen x}{x(x+1)} \\ y(1) = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$