

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA  
ANNO ACCADEMICO 2006-2007  
Prova scritta di **Analisi Matematica II**  
(per gli studenti del corso di laurea quadriennale in Matematica)  
Terza sessione - Appello straordinario - 14 Dicembre 2007

---

- 1) Non si possono consultare libri o appunti.
  - 2) Tempo: tre ore.
- 

I

Sia  $F$  la funzione reale definita dalla legge:

$$F(x, y) = \log(x^2 - 2xy + y^2 + x - y + 1) .$$

Trovare

- i) l'insieme di esistenza  $X$  di  $F$ ;
- ii) gli eventuali punti di minimo e di massimo relativi di  $F$  in  $X$ ;
- iii) gli eventuali punti di minimo e di massimo assoluti di  $F$  in  $X$ ;
- iv) gli estremi inferiore e superiore di  $F$  in  $X$ .

II

Studiare, in ogni intervallo dell'asse reale, la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

$$\left\{ (x^2 - 1) \frac{1}{n} \right\}, \quad \left\{ (x^2 - 1)^n \right\}, \quad \left\{ (x^2 - 1)^n \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right\} .$$

III

Risolvere la seguente equazione differenziale lineare:

$$y''' - y'' - y' + y = xe^{-x} .$$

IV

Sia  $f$  una funzione di  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}$ . Provare che se  $f$  è di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}^2$  e se esistono due costanti positive  $h$  e  $k$  tali che:

$$f_x(x, y) \geq h, \quad f_y(x, y) \geq k, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

allora

$$\lim_{(x, y) \rightarrow \infty} f_0(x, y) = +\infty, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow \infty} f_1(x, y) = -\infty,$$

dove  $f_i$ ,  $i = 0, 1$ , è la restrizione di  $f$  all'aperto  $A_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-1)^i x > 0, (-1)^i y > 0\}$ .