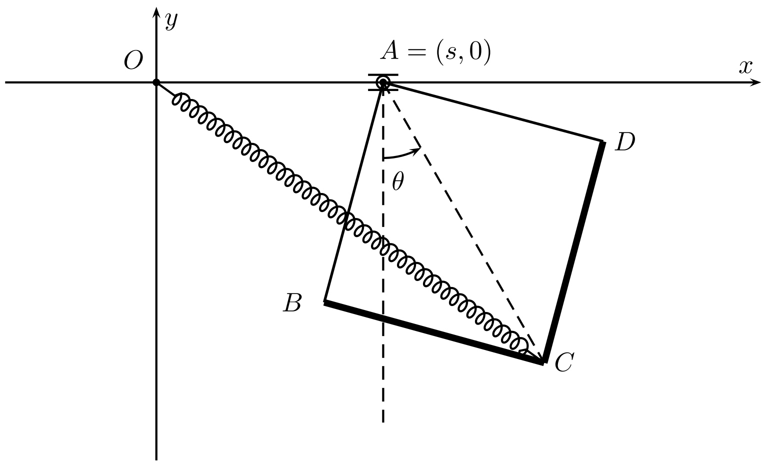
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale.
Esercizio B del compito di Fisica Matematica del 12 Settembre 2014.

Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da un telaio quadrato $ABCD$ con diagonale di lunghezza $2L$. Le aste AB e AD hanno massa m, mentre le aste BC e CD hanno massa $3m$. Il vertice A del telaio è vincolato a scorrere tramite un carrello su un asse orizzontale (il telaio è libero di ruotare attorno ad A). Oltre alla forza peso, sul sistema agisce una forza elastica $-k(C-O)$ applicata al vertice C opposto ad A, dove O è un punto fisso dell'asse orizzontale. Assunti il sistema di riferimento e le variabili lagrangiane s e θ indicate in figura, e sapendo che $k = 5\frac{mg}{L}$, determinare:

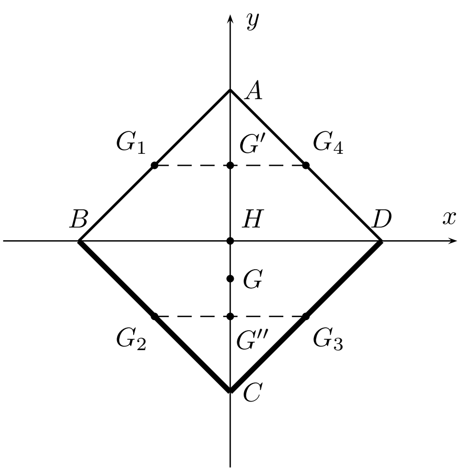
1) Tutte le configurazioni di equilibrio del sistema tramite il calcolo del potenziale.
2) Le reazioni vincolari in A nelle configurazioni di equilibrio.
Svolgere uno dei due seguenti punti, determinare:
3a) L'energia cinetica totale del sistema.
3b) La matrice principale e centrale d'inerzia del telaio.
(Il baricentro G del telaio si trova sulla diagonale AC con $|AG| = \frac{5}{4}L$).



Svolgimento.
Aste AB e DA: m; aste BC e CD: $3m$; diagonale AC: $2L$.

Calcoliamo intanto la lunghezza delle aste. Trattandosi di un quadrato la diagonale è pari a $\sqrt{2}$ volte il lato, e quindi il lato sarà $2L/\sqrt{2} = \sqrt{2}L$, ovvero $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = \sqrt{2}L$.

Le aste hanno massa diversa, quindi il baricentro G del telaio non corrisponde col centro geometrico, che chiamiamo H. Anche se la distanza AG viene suggerita, è possibile determinarla rapidamente.



Consideriamo un sistema di riferimento come in figura, le diagonali AC e BD sono lunghe $2L$, quindi i punti A, B, C, D sono tutti a distanza L dal centro H, cioè $A = (0, L)$ etc. Il baricentro di ogni asta (essendo tutte omogenee) sarà il suo punto medio, notiamo poi che il baricentro del sistema costituito dalle due aste (di uguale massa m) AB e AD sarà il punto medio G' dei rispettivi baricentri G_1 e G_4, allo stesso modo il baricentro del sistema costituito da BC e CD (entrambe di massa $3m$) sarà G'', punto medio di G_2 e G_3. E' abbastanza evidente che $G' = (0, L/2)$, $G'' = (0, -L/2)$. Per la legge di composizione dei baricentri, il baricentro G dell'intero sistema coincide col baricentro di due corpi puntiformi posti in G' e G'' rispettivamente di massa $m_1 = 2m$ (somma delle masse di AB e AD) e $m_2 = 6m$ (somma delle masse di BC e CD). L'ascissa di G è quindi nulla, e l'ordinata è data da

$$y_G = \frac{m_1 y_{G'} + m_2 y_{G''}}{m_1 + m_2} = \frac{2m\frac{L}{2} - 6m\frac{L}{2}}{8m} = \frac{mL - 3mL}{8m} = -\frac{L}{4}.$$

Essendo $G = (0, -L/4)$, la distanza $|AG|$ è quindi pari a $\frac{5}{4}L$.

Determiniamo le coordinate dei punti utili alla risoluzione del problema. Il punto A è dato, esprimiamo le coordinate dei punti C e G in funzione delle variabili lagrangiane s, θ.

$$\begin{array}{l}(C-A) = 2L\sin\theta\,\mathbf{i} - 2L\cos\theta\,\mathbf{j}; \qquad (A-O) = s\,\mathbf{i}\\ (C-O) = (C-A) + (A-O) = (s + 2L\sin\theta)\,\mathbf{i} - 2L\cos\theta\,\mathbf{j}\\ (G-O) = (G-A) + (A-O) = (s + \frac{5}{4}L\sin\theta)\,\mathbf{i} - \frac{5}{4}L\cos\theta\,\mathbf{j}\end{array}$$

Punto 1). Tutte le forze sono conservative, calcoliamo allora i potenziali. La forza peso agisce sulle quattro aste che costituiscono però un unico corpo rigido. E' certamente conveniente considerare quindi la forza peso del telaio (di massa totale $8m$) applicata al suo baricentro G appena determinato, e determinare il relativo potenziale U_t,

$$U_t = (G-O)\cdot(-8mg\mathbf{j}) = -8mg(G-O)_y = 10mgL\cos\theta.$$

Il potenziale della forza elastica agente su C, ricordando che $k = 5mg/L$, è

$$U_{el} = -\frac{1}{2}k\,(C-O)^2 = -\frac{1}{2}k[(s+2L\sin\theta)^2 + (2L\cos\theta)^2] = -\frac{5}{2}\frac{mg}{L}(s^2 + 4Ls\sin\theta + 4L^2).$$

Il potenziale totale $U = U_t + U_{el}$ è quindi

$$U = 10mgL\cos\theta - \frac{5}{2}\frac{mg}{L}\,(s^2 + 4Ls\sin\theta + 4L^2).$$

Troviamo le configurazioni di equilibrio eguagliando a zero le derivate del potenziale,

$$\begin{cases}\partial_s U = -\frac{5}{2}\frac{mg}{L}\,(2s + 4L\sin\theta),\\ \partial_\theta U = -10mgL\sin\theta - 10mgs\cos\theta.\end{cases}$$

Dobbiamo risolvere quindi

$$\begin{cases} s + 2L\sin\theta = 0,\\ L\sin\theta + s\cos\theta = 0.\end{cases}$$

Sostituendo $s = -2L\sin\theta$ ricavato dalla prima equazione nella seconda otteniamo

$$L\sin\theta - 2L\sin\theta\cos\theta = L\sin\theta(1 - 2\cos\theta) = 0, \quad \longrightarrow \quad \sin\theta = 0, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}.$$

Le soluzioni in θ sono quindi $\theta = 0, \pi$, e $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$, sostituendo nella prima equazione determiniamo le quattro configurazioni di equilibrio (s, θ):

$$(0,0), \quad (0,\pi), \quad \left(-\sqrt{3}\,L, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(\sqrt{3}\,L, -\frac{\pi}{3}\right).$$

Punto 2). Valutiamo la reazione vincolare nel carrello in A. Essendo un carrello avremo solo una reazione vincolare verticale (e nessun momento), indichiamo comunque con $\mathbf{\Phi}_A = \Phi_{Ax}\mathbf{i} + \Phi_{Ay}\mathbf{j}$ tale reazione. Agli equilibri avremo, per la prima equazione cardinale della statica,

$$\mathbf{\Phi}_A + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_{el} = \mathbf{0},$$

dove le due $\mathbf{F}$ sono la forza peso (dell'intero telaio) e la forza elastica agente in C, ovvero

$$\Phi_{Ax}\mathbf{i} + \Phi_{Ay}\mathbf{j} - 8mg\,\mathbf{j} - 5\frac{mg}{L}[(s + 2L\sin\theta)\,\mathbf{i} - 2L\cos\theta\,\mathbf{j}] = \mathbf{0},$$

separando le componenti ricaviamo

$$\Phi_{Ax} = 5\frac{mg}{L}(s + 2L\sin\theta), \qquad \Phi_{Ay} = 8mg + 10mg\,\cos\theta.$$

La prima equazione ci conferma che la reazione vincolare ha componente orizzontale nulla, in quanto agli equilibri abbiamo sempre $s + 2L\sin\theta = 0$, dalla seconda ricaviamo la componente Φ_{Ay} nelle quattro configurazioni di equilibrio sopra trovate

$$18mg, \quad -2mg, \quad 3mg, \quad 3mg.$$

Le due ultime configurazioni sono speculari rispetto all'asse y e le due rispettive reazioni vincolari sono prevedibilmente uguali.
Notiamo anche che sia la forza peso che la reazione vincolare in A sono sempre verticali, quindi all'equilibrio anche la forza elastica (e quindi la molla) deve essere verticale, cosa che è garantita dall'annullamento di $s + 2L\sin\theta$ che non è altro che l'ascissa di C.
Si consiglia sempre di rappresentare (schematicamente) le configurazioni di equilibrio trovate, anche per delle verifiche geometriche e fisiche di consistenza dei risultati.

Punto 3a). L'impostazione del calcolo dell'energia cinetica è semplice, in quanto il sistema è costituito da un unico corpo rigido, il telaio, che esegue un moto nel piano xy.
Dato che il moto *non è puramente rotatorio* (il telaio non ha punti fissi nel piano) per il calcolo dell'energia cinetica sfruttiamo il teorema di Koenig, scrivendo quindi

$$T = \frac{1}{2}M_t V_G^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

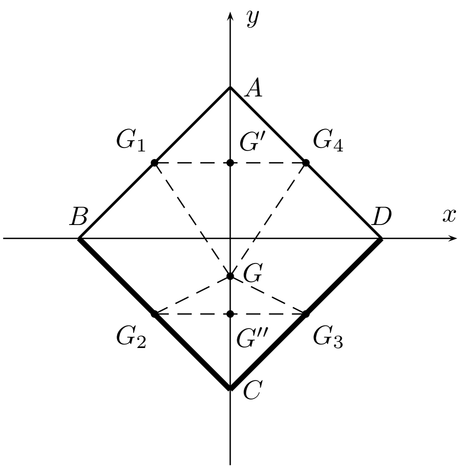
dove $M_t = 8m$ è la massa totale del sistema, $\mathbf{V}_G$ è la velocità del baricentro, e I è il momento d'inerzia del telaio rispetto a un asse (parallelo all'asse z) passante per il baricentro G.
Calcoliamo intanto la velocità $\mathbf{V}_G$ derivando le coordinate di G rispetto al tempo,

$$\mathbf{V}_G = (\dot{s} + \frac{5}{4}L\cos\theta\,\dot{\theta})\,\mathbf{i} + \frac{5}{4}L\sin\theta\,\dot{\theta}\mathbf{j}$$

e quindi

$$V_G^2 = \dot{s}^2 + \frac{5}{2}L\cos\theta\,\dot{s}\dot{\theta} + \frac{25}{16}L^2\dot{\theta}^2.$$

La difficoltà principale è il calcolo del momento di inerzia I. Consideriamo nuovamente il telaio nel riferimento visto in precedenza.



Calcoleremo il momento l'inerzia totale come somma dei quattro momenti d'inerzia delle aste rispetto al punto G. Per ognuna delle aste, il momento d'inerzia rispetto a un asse (sottintendiamo sempre: diretto lungo z) passante per il rispettivo baricentro è noto ed è dato da $\frac{1}{12}M\ell^2$, dome M ed ℓ indicano la generica massa e lunghezza di un'asta. Consideriamo ad esempio l'asta AB, avremo $M = m$ e $\ell = \sqrt{2}L$, quindi

$$I_{AB}^{G_1} = \frac{1}{12}m(\sqrt{2}L)^2 = \frac{1}{6}mL^2.$$

Per calcolare il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante invece per G, usiamo la formula di Huygens-Steiner e quindi

$$I_{AB}^{G} = I_{AB}^{G_1} + md'^2$$

dove con d' indichiamo la distanza tra i due assi di rotazione e quindi tra i punti G_1 e G. Considerando che le coordinate di G, G', G_1 sono note possiamo applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo avente tali vertici e ricavare

$$d'^2 = |G_1G|^2 = |G_1G'|^2 + |GG'|^2 = \left(\frac{1}{2}L\right)^2 + \left(\frac{3}{4}L\right)^2 = \frac{1}{4}L^2 + \frac{9}{16}L^2 = \frac{13}{16}L^2,$$

da cui

$$I_{AB}^{G} = \frac{1}{6}mL^2 + \frac{13}{16}mL^2 = \frac{47}{48}mL^2.$$

Il calcolo di I_{AD}^{G} è identico, quindi $I_{AD}^{G} = I_{AB}^{G}$. Per il calcolo relativo alle aste BC e CD, dobbiamo ricavare la distanza d'' tra i punti G_2 e G (o anche G_3 e G) quindi

$$d''^2 = |G_2G|^2 = |G_2G''|^2 + |GG''|^2 = \left(\frac{1}{2}L\right)^2 + \left(\frac{1}{4}L\right)^2 = \frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{16}L^2 = \frac{5}{16}L^2.$$

Tenendo conto anche del fatto che le masse di BC e CD sono pari a $3m$ ricaviamo per BC

$$I_{BC}^{G} = I_{BC}^{G_2} + 3m\,d''^2 = \frac{1}{12}3m(\sqrt{2}L)^2 + 3m\frac{5}{16}L^2 = \frac{1}{2}mL^2 + \frac{15}{16}mL^2 = \frac{23}{16}mL^2,$$

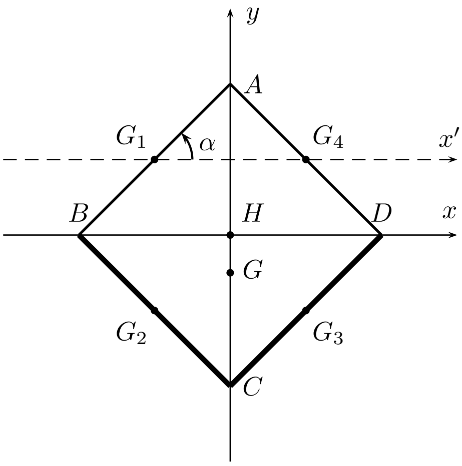
e lo stesso valore per I^G_{CD}. Il momento d'inerzia totale è dato allora da

$$I = 2\, I^G_{AB} + 2\, I^G_{BC} = \left(\frac{47}{24} + \frac{23}{8}\right) mL^2 = \frac{116}{24} mL^2 = \frac{29}{6} mL^2.$$

Comsderando anche che la velocità angolare sarà $\omega = \dot\theta$ possiamo scrivere l'energia cinetica totale

$$T = 4m(\dot s^2 + \frac{5}{2} L\cos\theta\, \dot s\dot\theta + \frac{25}{16} L^2\dot\theta^2) + \frac{29}{12} mL^2\dot\theta^2.$$

Punto 3b). Il calcolo di una matrice principale, e poi centrale, d'inerzia risulta forse più facile del calcolo diretto del precedente momento I (che corrisponde a I_z nella matrice principale e centrale cercata).



Consideriamo nuovamente il telaio nel riferimento precedente, e notiamo intanto che l'asse y è un asse di simmetria del telaio, quindi assieme all'asse z, qualunque asse ortogonale a y formerà una terna principale. Scegliamo per comodità l'asse x passante per il centro geometrico H e procediamo col calcolo dei momenti d'inerzia delle quattro aste in questo riferimento. Ricordiamo che il momento d'inerzia di un'asta omogenea (di massa M e lunghezza ℓ) rispetto ad un asse passante per il baricentro e inclinato di un angolo α rispetto all'asta è pari a $I_\alpha = \frac{1}{12} M\ell^2 \sin^2\alpha$. Considerando l'asse di rotazione x' parallelo a x e passante per G_1, abbiamo l'angolo $\alpha = \pi/4$, e quindi

$$I^{x'}_{AB} = \frac{1}{12} m(\sqrt{2}L)^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m 2L^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{12} mL^2$$

Considerando la rotazione attorno all'asse x, che dista $L/2$ dall'asse x', abbiamo (per H-S)

$$I^x_{AB} = \frac{1}{12} mL^2 + \frac{1}{4} mL^2 = \frac{1}{3} mL^2.$$

Per abbreviare ulteriormente il calcolo, possiamo anche ricordare che il momento d'inerzia di un'asta omogenea rispetto a un asse passante per un estremo e inclinato di α rispetto all'asta è dato da $\frac{1}{3} M\ell^2 \sin^2\alpha$, ricavando immediatamente $I^x_{AB} = \frac{1}{3} m(\sqrt{2}L)^2(\sqrt{2}/2)^2 = \frac{1}{3} mL^2$.
Notiamo che un calcolo identico ci porta a $I^x_{AD} = I^x_{AB}$, inoltre potremmo considerare un altro asse y' parallelo a y e passante per G_1, ricavando ancora $I^y_{AB} = I^y_{AD} = \frac{1}{3} mL^2$. Con analogo ragionamento, tenendo conto però della massa pari a $3m$ delle aste BC e CD, ricaviamo $I^x_{BC} = I^x_{CD} = I^y_{BC} = I^y_{CD} = mL^2$.
Sommando i contributi della quattro aste ricaviamo quindi $I_x = I_y = (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 + 1) mL^2 = \frac{8}{3} mL^2$, e la matrice principale

$$\mathbf{I}^H = mL^2 \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{bmatrix}$$

dove naturalmente, trattandosi di un sistema piano, $I_z = I_x + I_y$. Come abbiamo già visto, il baricentro del sistema si trova in $G = (0, -L/4)$, quindi la matrice principale e centrale deve essere calcolata rispetto ad assi paralleli ai precedenti (che chiamiamo $\bar x, \bar y, \bar z$) ma con origine in G. La distanza tra y e $\bar y$ è nulla, mentre $dist(x, \bar x) = |GH| = L/4$. Applicando quindi H-S al momento I_x abbiamo $I^H_x = I^G_x + M_t|GH|^2$, e quindi

$$I^G_x = I^H_x - M_t|GH|^2 = \frac{8}{3} mL^2 - 8m\frac{L^2}{16} = \frac{13}{6} mL^2$$

la matrice principale e centrale d'inerzia risulta allora

$$\mathbf{I}^G = mL^2 \begin{bmatrix} \frac{13}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{29}{6} \end{bmatrix},$$

dove ritroviamo anche il valore di I_z (come somma del nuovo I_x e I_y).