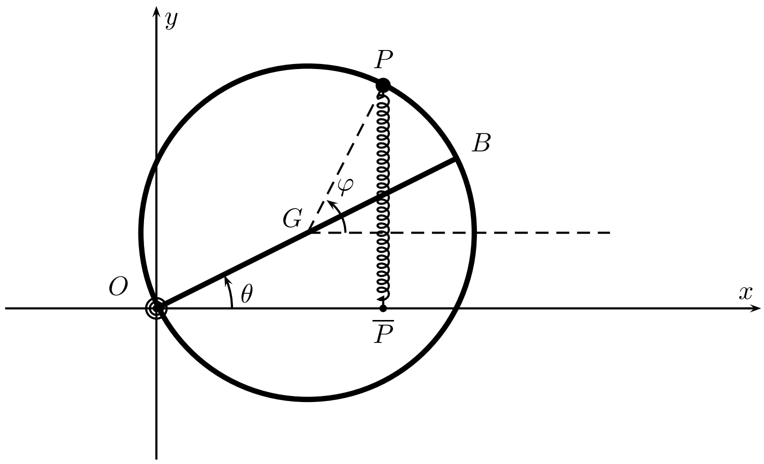
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale.
Esercizio B del compito di Fisica Matematica del 23 Maggio 2014.

Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da un'asta OB omogenea di lunghezza $2R$ e massa $2m$ incernierata a un punto fisso O e una guida circolare omogenea di raggio R e massa $5m$ saldata all'asta OB coincidente con un suo diametro. Sulla guida circolare si muove liberamente un punto P di massa m. La cerniera si intende liscia. Oltre alla forza peso, sul sistema agisce una forza elastica $-k(P-\overline{P})$ applicata in P, dove $\overline{P}$ è la proiezione di P sull'asse orizzontale passante per O.
Assunti il sistema di riferimento e le variabili lagrangiane θ e φ indicate in figura, e sapendo che $k = 2\frac{mg}{R}$, determinare:
1) Tutte le configurazioni di equilibrio del sistema.
2) Le reazioni vincolari in O e le reazioni interne in P nelle configurazioni di equilibrio.
3a) L'energia cinetica totale del sistema (facoltativo: le equazioni di Lagrange del sistema).
3b) La matrice principale centrale d'inerzia del sistema costituito dall'asta, la guida circolare e il punto P, assumendo che esso sia saldato in B.
Gli studenti di Ing. Ind. svolgano il punto 3a, gli studenti di Ing. Mecc. il punto 3b.



Svolgimento.
Asta OB: $2R$, $2m$. Guida circolare: R, $5m$. Punto P: m.
Determiniamo le coordinate dei punti utili alla risoluzione del problema. G è il punto medio dell'asta, baricentro sia dell'asta che della guida circolare.

$$\begin{array}{l}(G-O) = R\cos\theta\,\mathbf{i} + R\sin\theta\,\mathbf{j}; \qquad (P-G) = R\cos\varphi\,\mathbf{i} + R\sin\varphi\,\mathbf{j}\\ (P-O) = (G-O)+(P-G) = R(\cos\theta+\cos\varphi)\,\mathbf{i} + R(\sin\theta+\sin\varphi)\,\mathbf{j}\\ (\overline{P}-O) = R(\cos\theta+\cos\varphi)\,\mathbf{i}; \quad \text{inoltre } (P-\overline{P}) = R(\sin\theta+\sin\varphi)\,\mathbf{j}\end{array}$$

Punto 1). Tutte le forze sono conservative, calcoliamo allora i potenziali. Potenziali della forza peso, con indici: a=asta, c=circonferenza, p=punto,

$$\begin{array}{l}U_a = (G-O)\cdot(-2mg\mathbf{j}) = -2mg(G-O)_y = -2mgR\sin\theta\\ U_c = -5mg(G-O)_y = -5mgR\sin\theta\\ U_p = -2mg(P-O)_y = -mgR(\sin\theta+\sin\varphi).\end{array}$$

Potenziale della forza elastica agente su P, ricordando che $k = 2mg/R$,

$$U_{el} = -\frac{1}{2}k\,(P-\overline{P})^2 = -\frac{1}{2}kR^2\,(\sin\theta+\sin\varphi)^2 = -mgR\,(\sin\theta+\sin\varphi)^2$$

Il potenziale totale $U = U_a + U_c + U_p + U_{el}$ è quindi

$$U = -mgR\,(8\sin\theta + \sin\varphi + (\sin\theta+\sin\varphi)^2).$$

Troviamo le configurazioni di equilibrio eguagliando a zero le derivate del potenziale $U = -mgR\bar{U}$, a meno del fattore costante $-mgR$,

$$\begin{cases}\partial_\theta\bar{U} = 8\cos\theta + 2(\sin\theta+\sin\varphi)\cos\theta = 0,\\ \partial_\varphi\bar{U} = \cos\varphi + 2(\sin\theta+\sin\varphi)\cos\varphi = 0.\end{cases}$$

Dobbiamo risolvere quindi

$$\begin{cases} \cos\theta\,(4+\sin\theta+\sin\varphi)=0, \\ \cos\varphi\,(1+2\sin\theta+2\sin\varphi)=0. \end{cases}$$

Nella prima equazione notiamo che il secondo fattore non può annullarsi, essendo ovviamente $4+\sin\theta+\sin\varphi\geq 2$ per $\forall\theta,\varphi$, deve essere quindi $\cos\theta=0$, e cioè $\theta=\pm\pi/2$.
Per $\theta=\pi/2$ la seconda equazione diventa

$$\cos\varphi\,(3+2\sin\varphi)=0.$$

Anche qua notiamo che $(3+2\sin\varphi)$ non può annullarsi e quindi le uniche soluzioni sono date da $\cos\varphi=0$ e cioè $\varphi=\pm\pi/2$.
Per $\theta=-\pi/2$ la seconda equazione diventa invece

$$\cos\varphi\,(-1+2\sin\varphi)=0,$$

e oltre alle soluzioni date da $\cos\varphi=0$ troviamo anche $\sin\varphi=1/2$, e cioè $\varphi=\pi/6$, $\varphi=\pi-\pi/6=5\pi/6$. Riassumendo, abbiamo trovato le sei configurazioni di equilibrio (θ,φ)

$$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right),\quad \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ \left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right),\ \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right),\ \left(-\frac{\pi}{2},5\frac{\pi}{6}\right).$$

Punto 2). Valutiamo la reazione vincolare nella cerniera O. Essendo una cerniera liscia avremo solo forze di reazione e non momenti, quindi indicando con $\boldsymbol{\Phi}_O=\Phi_{Ox}\mathbf{i}+\Phi_{Oy}\mathbf{j}$ tale reazione, agli equilibri avremo la condizione di staticità per l'intero sistema (prima equazione cardinale della statica)

$$\boldsymbol{\Phi}_O+\mathbf{F}_a+\mathbf{F}_c+\mathbf{F}_p+\mathbf{F}_{el}=\mathbf{0},$$

dove le $\mathbf{F}$ sono le forze peso e la forza elastica agenti sul sistema, ovvero

$$\boldsymbol{\Phi}_O-2mg\,\mathbf{j}-5mg\,\mathbf{j}-mg\,\mathbf{j}-2\frac{mg}{R}(P-\overline{P})=\boldsymbol{\Phi}_O-8mg\,\mathbf{j}-2mg\,(\sin\theta+\sin\varphi)\,\mathbf{j}=\mathbf{0},$$

ne segue

$$\Phi_{Ox}=0,\qquad \Phi_{Oy}=8mg+2mg\,(\sin\theta+\sin\varphi),$$

quindi nelle sei configurazioni di equilibrio elencate sopra avremo Φ_{Oy} rispettivamente uguale a

$$12mg,\quad 8mg,\quad 8mg,\quad 4mg,\quad 7mg,\quad 7mg.$$

Notiamo che sia le forze peso che la forza esercitata dalla molla sono verticali, quindi all'equilibrio l'unica reazione vincolare esterna deve essere pure verticale (in presenza di più reazioni vincolari, la loro risultante sarebbe stata verticale).
Consideriamo il punto P, e sia $\boldsymbol{\Phi}_P=\Phi_{Px}\mathbf{i}+\Phi_{Py}\mathbf{j}$ la reazione esercitata su di esso dalla guida. Negli equilibri risulterà pari a zero la risultante della reazione e delle forze agenti su P, ovvero forza peso e forza elastica,

$$\boldsymbol{\Phi}_P-mg\,\mathbf{j}-2\frac{mg}{R}(P-\overline{P})=\boldsymbol{\Phi}_P-mg\,\mathbf{j}-2mg\,(\sin\theta+\sin\varphi)\,\mathbf{j}=\mathbf{0}.$$

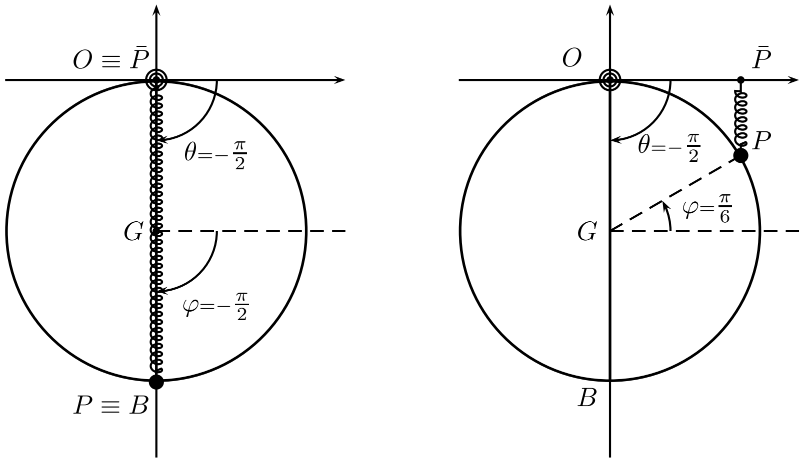
Si ha quindi

$$\Phi_{Px}=0,\qquad \Phi_{Py}=mg+2mg\,(\sin\theta+\sin\varphi),$$

e nelle sei configurazioni di equilibrio Φ_{Py} varrà

$$5mg,\quad mg,\quad mg,\quad -3mg,\quad 0,\quad 0.$$

Notiamo che sia la forza peso che la forza elastica sono verticali, quindi all'equilibrio anche la reazione vincolare in P è verticale.
Nello svolgimento di una prova scritta sarebbe sempre utile rappresentare (schematicamente) le configurazioni di equilibrio, anche per delle verifiche geometriche e fisiche di consistenza dei risultati.
A titolo di esempio, raffiguriamo la quarta e quinta configurazione, $(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}),(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6})$,



La quarta configurazione (sinistra) è l'unica in cui la reazione vincolare $\mathbf{\Phi}_P$ in P è diretta verso il basso, $\Phi_{Py} = -3mg$, contrastando la forza esercitata dalla molla alla sua massima estensione, $\mathbf{F}_{el} = 4mg\mathbf{j}$.
Nella quinta configurazione (destra) la reazione vincolare in P risulta nulla. Questo è coerente coi risultati precedenti, infatti in questa configurazione la reazione in P (ortogonale necessariamente alla guida) deve essere obliqua, ma sappiamo che $\Phi_{Px} = 0$, e quindi anche $\Phi_{Py} = 0$. In questa configurazione la reazione in O compensa esattamente la forza peso agente sull'asta e la guida, la forza elastica compensa la forza peso agente sul punto.

Punto 3a). Per il calcolo dell'energia cinetica possiamo considerare il sistema composto da tre parti, l'asta OB, la guida circolare e il punto P (anche se l'asta e la guida costituiscono un unico corpo rigido). Calcoliamo separatamente l'energia cinetica di ognuna delle parti, sottintendendo che i moti si svolgono nel piano verticale xy.
L'asta esegue un moto *puramente rotatorio* attorno al suo estremo O, quindi l'energia cinetica può essere calcolata come $T_a = \frac{1}{2} I_a^O \omega^2$, dove il modulo della velocità angolare ω sarà dato da $|\dot{\theta}|$, e il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse passante per un suo estremo è noto, ed è pari a $I = \frac{1}{3} ML^2$, essendo M ed L massa e lunghezza dell'asta. Nel caso dell'asta OB sarà

$$I_a^O = \frac{1}{3} 2m(2R)^2 = \frac{8}{3} mR^2; \qquad T_a = \frac{4}{3} mR^2 \dot{\theta}^2.$$

Anche la guida circolare esegue un moto puramente rotatorio attorno a O. Il momento d'inerzia I_c^G della guida rispetto al suo centro G è pari a MR^2, con M massa della guida (momento noto o deducibile in maniera immediata), quindi per il teorema di Huygens-Steiner il momento d'inerzia I_c^O rispetto a un asse passante per O sarà $I_c^G + Md^2$ con $d = |OG| = R$. Sarà quindi

$$I_c^O = 5mR^2 + 5mR^2 = 10mR^2; \qquad T_c = \frac{1}{2} I_c^O \omega^2 = 5mR^2 \dot{\theta}^2.$$

L'energia cinetica del punto è banalmente $T_p = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2$ (dove la velocità va ricavata derivando rispetto al tempo le coordinate del punto), quindi ricaviamo $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{P}}$

$$\dot{\mathbf{P}} = -R(\sin\theta\dot{\theta} + \sin\varphi\dot{\varphi})\,\mathbf{i} + R(\cos\theta\dot{\theta} + \cos\varphi\dot{\varphi})\,\mathbf{j}.$$

Calcoliamo allora $\mathbf{v}^2 = \dot{\mathbf{P}}^2 = \dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2$,

$$\mathbf{v}^2 = R^2(\sin\theta\dot{\theta} + \sin\varphi\dot{\varphi})^2 + R^2(\cos\theta\dot{\theta} + \cos\varphi\dot{\varphi})^2 = R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi)\,\dot{\theta}\dot{\varphi}).$$

Risulta quindi

$$T_p = \frac{1}{2} mR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\cos(\theta - \varphi)\,\dot{\theta}\dot{\varphi}),$$

e l'energia cinetica totale sarà $T = T_a + T_c + T_p$, esplicitamente

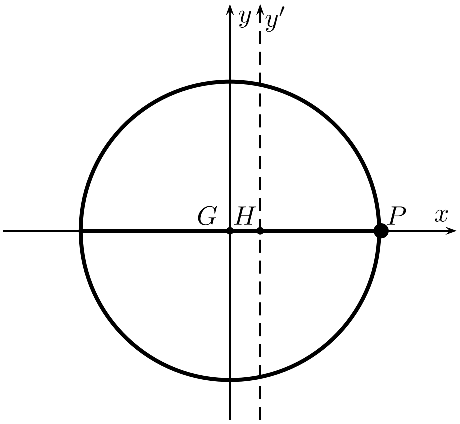
$$T = \frac{41}{6} mR^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mR^2\,\dot{\varphi}^2 + mR^2\cos(\theta - \varphi)\,\dot{\theta}\dot{\varphi}.$$

Le equazioni di Lagrange possono essere ricavate dalla lagrangiana $L = T + U$

$$L = mR^2\left(\frac{41}{6}\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2 + \cos(\theta - \varphi)\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\right) - mgR\,(8\sin\theta + \sin\varphi + (\sin\theta + \sin\varphi)^2)$$

calcolando
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0,\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0.$$

Punto 3b). Per il calcolo della matrice principale e centrale d'inerzia del sistema indicato, osserviamo che la retta contenente l'asta, che chiamiamo r, è un asse di simmetria piana per il sistema e quindi asse principale d'inerzia. Una qualunque retta del piano ortogonale a r sarà anche asse principale d'inerzia. (Il terzo asse d'inerzia sarà ortogonale al piano del sistema.) Consideriamo allora il sistema non centrale di assi principali d'inerzia con origine in G, e asse x coincidente con r.



Il punto G è centro di massa sia dell'asta che della circonferenza. Nel riferimento con origine G i momenti d'inerzia I_a dell'asta rispetto agli assi x, y sono pari a
$$I_{ax}=0,\quad I_{ay}=\frac{1}{12}2m(2R)^2=\frac{2}{3}mR^2,$$
i momenti d'inerzia I_c della guida circolare sono dati da
$$I_{cx}=I_{cy}=\frac{1}{2}5mR^2,$$
i momenti d'inerzia I_p del punto sono
$$I_{px}=0,\quad I_{py}=mR^2.$$
Gli assi considerati sono principali d'inerzia per tutti e tre i corpi, quindi le rispettive matrici d'inerzia sono diagonali, inoltre il momento I_z sarà sempre uguale alla somma I_x+I_y. Sommando i tre contributi, la matrice dell'intero sistema è quindi
$$\mathbf{I}^G=mR^2\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&0&0\\0&\frac{25}{6}&0\\0&0&\frac{20}{3}\end{bmatrix}$$

Il centro di massa H dell'intero sistema si trova, per simmetria, sull'asse x, con ascissa data da
$$x_H=\frac{0\cdot 5m+0\cdot 2m+R\cdot m}{5m+2m+m}=\frac{R}{8}.$$

Consideriamo allora i nuovi assi x', y', z' paralleli ai precedenti, ma con origine in H. Il momento I_x non cambia nel passaggio alla nuova origine H perché $d=\mathrm{dist}(x,x')=0$, quindi $I_x^H=I_x^G$. Riguardo al momento I_y, per il teorema di Huygens-Steiner *applicato all'intero sistema*, e ricordando che H è il baricentro del sistema, si avrà $I_y^G=I_y^H+Md^2$, con $M=8m$ massa totale e $d=\mathrm{dist}(y,y')=(H-G)_x=R/8$, quindi
$$I_y^H=\left(\frac{25}{6}-\frac{1}{8}\right)mR^2=\frac{97}{24}mR^2,\quad I_z^H=I_x^H+I_y^H=\left(\frac{5}{2}+\frac{97}{24}\right)mR^2=\frac{157}{24}mR^2$$

e la matrice principale e centrale d'inerzia risulta allora
$$\mathbf{I}^H=mR^2\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&0&0\\0&\frac{97}{24}&0\\0&0&\frac{157}{24}\end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{I}^H$ si poteva ricavare anche calcolando le tre matrici di inerzia $\mathbf{I}_a^H, \mathbf{I}_c^H, \mathbf{I}_p^H$ rispetto al baricentro del sistema H e sommandole, con un procedimento leggermente più lungo.