Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x\,e^{-x}}$$

(a) Determinare il dominio e studiare i limiti agli estremi del dominio, ricercando eventuali asintoti.

(b) Calcolare la derivata prima e ricercare gli intervalli di crescenza e decrescenza ed i punti di estremo relativo.

(c) Studiare l'andamento della funzione in $x = 0$ calcolando il $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$.

(d) Disegnare il grafico della funzione.

(a) Imponiamo che l'argomento della radice sia non negativo, quindi $x\,e^{-x} \geq 0$. Il fattore esponenziale è sempre positivo, l'unico vincolo da imporre è $x \geq 0$ e il dominio risulta $D = [0, +\infty)$.
Non serve calcolare il $\lim_{x\to 0}$, infatti la funzione è definita anche per $x = 0$, ed è continua in quanto composizione di funzioni continue, quindi $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ e non abbiamo asintoti in $x = 0$.
Calcoliamo il limite per $x \to +\infty$. Vediamo che l'argomento della radice può essere scritto anche come x/e^x, e sappiamo che l'esponenziale è un infinito di ordine superiore rispetto a qualunque potenza di x, allora è $\lim_{x\to+\infty} x/e^x = 0$, e quindi anche $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x\,e^{-x}} = \sqrt{0} = 0$. Abbiamo come asintoto orizzontale destro la retta $y = 0$, cioè l'asse x.
(b) Ricordiamo che $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$, come si può anche ricavare dalla regola generale di derivazione delle potenze reali, cioè $(x^b)' = bx^{b-1}$, e dal fatto che $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Per la regola di derivazione delle funzioni composte avremo, in generale, $(\sqrt{g(x)})' = 1/(2\sqrt{g(x)}) \cdot g'(x)$, dove la $g(x)$ nel nostro caso è xe^{-x}. Risulta quindi

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{xe^{-x}}}(e^{-x} + xe^{-x}(-1)) = \frac{(1-x)e^{-x}}{2\sqrt{xe^{-x}}}.$$

Notiamo che per $x = 0$ il denominatore si annulla, quindi la derivata non è definita per $x = 0$. Il segno di questa derivata dipende unicamente dal segno di $1-x$ perché le altre quantità al numeratore e al denominatore sono positive. Si ha quindi $f'(x) = 0$ per $x = 1$, inoltre $f'(x) > 0$ per $0 < x < 1$ e $f'(x) < 0$ per $x > 1$. La funzione è strettamente crescente in $(0, 1)$ e strettamente decrescente in $(1, +\infty)$, e ha quindi un massimo in $x = 1$, con valore della funzione $f(1) = \sqrt{e^{-1}} = e^{-1/2}$. Punto di massimo $A = (1, e^{-1/2})$.
(c) La derivata non è definita in $x = 0$ e ricaviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-x)e^{-x}}{2\sqrt{xe^{-x}}} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Questo indica che la tangente tende ad essere verticale per $x = 0$.
(d) Della funzione conosciamo le informazioni ricavate ai precedenti punti, inoltre notiamo che $f(x) > 0$, tranne il punto $x = 0$ in cui $f(0) = 0$.

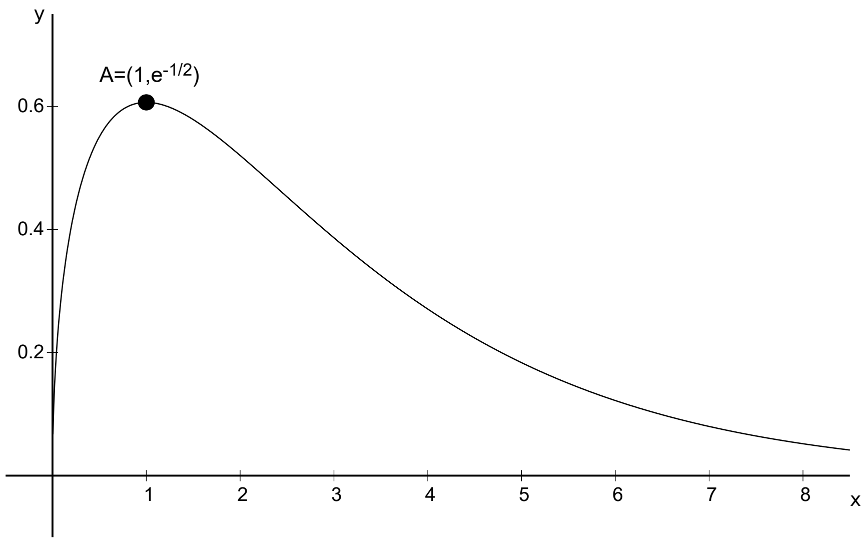

Grafico di $y = \sqrt{x\, e^{-x}}$

Nota: Non abbiamo studiato la derivata seconda ma il grafico è sicuramente concavo nelle vicinanze del massimo e convesso nell'avvicinamento all'asintoto orizzontale, quindi ci sarà un punto di flesso per qualche $x > 1$ che non abbiamo determinato.

Data la funzione

$$f(x) = |x^2 - 4x - 5|,$$

(a) Studiarla e tracciarne un grafico (sfruttare il fatto che l'asse di simmetria di una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ è dato da $x = -\frac{b}{2a}$).

(b) Determinare massimi e minimi **assoluti** e **relativi** nell'intervallo $[0, 6]$.

(a) Si tratta del valore assoluto di un polinomio di secondo grado, che in assenza del valore assoluto avrebbe come grafico una parabola. Per chiarezza definiamo $g(x) = x^2 - 4x - 5$, in modo che $f(x) = |g(x)|$. Data la presenza del valore assoluto, eventuali parti del grafico di $g(x)$ al di sotto dell'asse x verranno ribaltate specularmente rispetto allo stesso asse x per ottenere il grafico di $f(x)$.
Il coefficiente del termine di secondo grado è positivo, quindi la parabola rappresentata da $g(x)$ ha le "braccia" dirette verso l'alto (direzione positiva dell'asse y). Le intersezioni con l'asse x, ovvero i punti in cui la funzione si annulla, sono dati da $x^2 - 4x - 5 = 0$. Il discriminante risulta $\Delta = 16 + 20 = 36 > 0$, quindi ci sono due soluzioni date da $(4 \pm 6)/2$, cioè $x_1 = -1$, $x_2 = 5$. Punti $A = (-1, 0)$ e $B = (5, 0)$. L'asse di simmetria della parabola è dato dalla retta $x = 2$, e sull'asse troviamo anche il vertice che avrà quindi ascissa 2 e ordinata $g(2) = -9$. Vertice $V = (2, -9)$. Per concludere lo studio, troviamo l'intersezione di $g(x)$ con l'asse y, data da $g(0) = -5$. Punto $C = (0, -5)$. I due punti V, C di $g(x)$ saranno ribaltati rispetto all'asse x nei punti $V' = (2, 9)$ e $C' = (0, 5)$ nella rappresentazione del grafico di $f(x)$.
Possiamo quindi tracciare il grafico in base alle informazioni trovate.

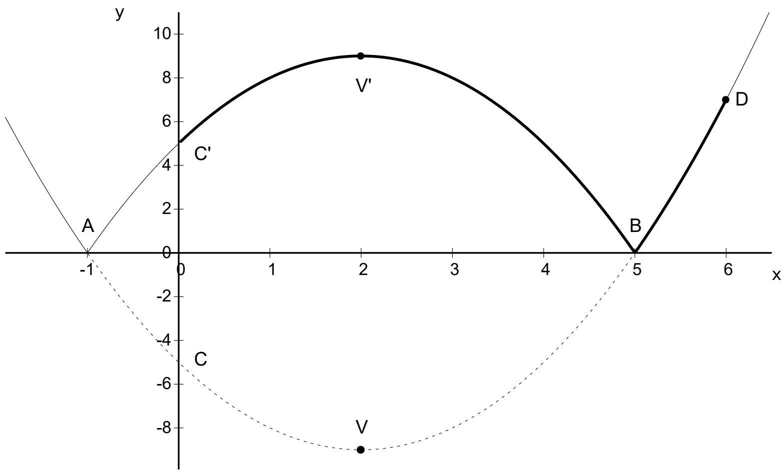

Grafico di $y = |x^2 - 4x - 5|$ e $y = x^2 - 4x - 5$ (tratteggiata in $[-1, 5]$).
Evidenziato anche l'intervallo $[0, 6]$.

(b) Dopo avere tracciato il grafico, osserviamo l'andamento nell'intervallo $[0, 6]$, e determiniamo anche il punto D all'estremo destro dell'intervallo $x = 6$. Essendo $f(6) = 36 - 24 + 5 = 7$, il punto risulta essere $D = (6, 7)$.
Ricordiamo che i punti di estremo assoluto in un intervallo chiuso vanno cercati tra i punti di estremo relativo interni all'intervallo, i punti di non derivabilità, e gli estremi dell'intervallo. Il punto V' in quanto vertice della parabola è un estremo relativo, interno all'intervallo. B è un punto di non derivabilità, infatti vediamo graficamente che si tratta di un punto angoloso, in cui la tangente destra e sinistra (e quindi le rispettive derivate) esistono ma sono diverse. Gli estremi dell'intervallo corrispondono ai punti C' e D.
In ordine di ascissa crescente abbiamo i quattro punti C', V', B, D in cui la funzione assume i valori $5, 9, 0, 7$, tra questi abbiamo un unico massimo di valore 9 nel punto V' e un unico minimo 0 nel punto B. Possiamo dire che la funzione in $[0, 6]$ ha un massimo assoluto per $x = 2$ con valore 9 e un minimo assoluto per $x = 5$ con valore 0.
I due punti V' e B sono anche un massimo e un minimo relativo. Inoltre l'estremo sinistro $C' = (0, 5)$ è un punto di minimo relativo perché la funzione in C' è crescente e quindi in un opportuno intorno destro di C' la funzione assumerà solo valori maggiori di 5. L'estremo destro D, con ragionamento simile, è invece un punto di massimo relativo.

Determinare il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} x(e^{\frac{2}{x}} - 1)$$

Osserviamo che il limite si presenta in una forma indeterminata, infatti $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ e l'esponenziale $e^{\frac{2}{x}}$ tende quindi a $e^0 = 1$. Abbiamo allora

$$\lim_{x \to +\infty} x(e^{\frac{2}{x}} - 1) = +\infty \cdot (1 - 1) = +\infty \cdot 0.$$

Proviamo a portare il limite in una forma che permette di usare il teorema di De l'Hopital, cioè nella forma $0/0$ o ∞/∞. Per ottenere la forma $0/0$ portiamo il fattore

x al denominatore, cioè

$$x(e^{\frac{2}{x}} - 1) = \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}},$$

in questo modo sia il numeratore che il denominatore tendono a zero, e possiamo procedere con

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} 2\, e^{\frac{2}{x}} = 2\, e^0 = 2.$$

Nota: Un metodo alternativo poteva essere ricordare il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

nella forma più generale $(e^{f(x)} - 1)/f(x) \to 1$ quando $f(x) \to 0$. Nel nostro caso si poteva assumere $f(x) = \frac{2}{x}$ e ottenere

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} 2\, \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{2}{x}} = 2 \cdot 1 = 2$$