Svolgimento - 20 Giugno 2025

Parte A

1. Classificare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(z^2+z)^2(z^2+1)}$$

e valutare l'integrale $\oint_\gamma f(z)\,dz$, dove γ è la curva di equazione $|z-1-i|=2$.

Le singolarià nascono solo dall'annullamento del denominatore, quindi troviamo

$$(z^2+z)^2(z^2+1) = z^2(z+1)^2(z^2+1) = 0 \quad\longrightarrow\quad z=0, z=-1, z=\pm i,$$

con $0, -1$ zeri doppi. Notiamo però che il numeratore si annulla per questi due valori di z, infatti $\sin k\pi = 0, \forall k$ intero. Quindi non si tratta di poli doppi ma probabilmente semplici. Per $z=\pm i$ il numeratore non si annulla, infatti $\sin z$ si annulla SOLO per i valori reali $k\pi$ dell'argomento z. Verifichiamo l'ordine del polo $z=0$ calcolando

$$\lim_{z\to 0} z\frac{\sin(\pi z)}{z^2(z+1)^2(z^2+1)} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin(\pi z)}{z(z+1)^2(z^2+1)} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{1}{(z+1)^2(z^2+1)}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{\sin(\pi z)}{z} = \lim_{z\to 0}\pi\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \pi$$

ricordando le proprietà dei limiti e un limite notevole. Quindi $z=0$ è in effetti un polo di primo ordine, con residuo π. Per $z=-1$ troviamo

$$\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{\sin(\pi z)}{z^2(z+1)^2(z^2+1)} = \lim_{z\to -1}\frac{\sin(\pi z)}{z^2(z+1)(z^2+1)} =$$

$$= \lim_{z\to -1}\frac{1}{z^2(z^2+1)}\cdot\lim_{z\to -1}\frac{\sin(\pi z)}{z+1} \overset{\text{H}}{=} \frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to -1}\frac{\pi\cos(\pi z)}{1} = \frac{1}{2}\pi\cos(-\pi) = -\frac{\pi}{2},$$

con applicazione della regola di de l'Hôpital. Anche questo è un polo semplice, col residuo trovato. Per le singolarità $\pm i$ troviamo pure poli del primo ordine con residuo

$$\text{Res}(f,\pm i) = \frac{\sin(\pm i\pi)}{4} = \pm i\,\frac{\sinh\pi}{4} = \pm i\,\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{8}.$$

La curva γ è una circonferenza di centro $1+i$ e raggio 2. Per calcolare l'integrale attraverso il teorema dei residui è necessario sapere quali singolarità sono interne a γ. È possibile una semplice verifica grafica della posizione delle quattro singolarità, oppure una verifica del tipo $|z_0-1-i|<2$ dove z_0 indica una singolarità. Troviamo

$$|(0)-1-i| = \sqrt{2} < 2, \qquad |(-1)-1-i| = |-2-i| = \sqrt{5} > 2,$$

$$|(i)-1-i| = |-1| = 1 < 2, \qquad |(-i)-1-i| = |-1-2i| = \sqrt{5} > 2,$$

quindi solo $z=0$, $z=i$ sono interni a γ e

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\pi + i\frac{\sinh\pi}{4}\right) = 2i\pi^2 - \frac{\pi}{2}\sinh\pi.$$

$\square$

2. Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} y' + 3\, y * \cos t \ = H(t-1) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Si tratta di un problema integro-differenziale, per la presenza della convoluzione tra y e $\cos t$ (indicata dall'usuale simbolo $*$), risolvibile applicando all'equazione la trasformata di Laplace. Indicando con Y la trasformata $\mathcal{L}[y]$ troviamo (ricordando che $\mathcal{L}[f * g] = F\, G$, formula 33.)

$$s\, Y + 3\, Y \frac{s}{s^2+1} = e^{-s}\frac{1}{s} \quad \to \quad Y(s + 3\frac{s}{s^2+1}) = e^{-s}\frac{1}{s} \quad \to \quad Y(s) = e^{-s}\frac{s^2+1}{s^2(s^2+4)}.$$

La Y si presenta nella forma di una trasformata di una funzione traslata nel tempo (formula 27.), basterà allora trovare l'antitrasformata della funzione a fattore, cioè

$$Y_1(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s^2+4)},$$

attraverso una scomposizione in fratti semplici del tipo

$$\frac{s^2+1}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

applicando l'identitià dei polinomi ai numeratori di primo e secondo membro, o anche

$$\frac{s^2+1}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + 2C\frac{2}{s^2+4} - 2D\frac{s}{s^2+4}$$

con $C + iD = \mathrm{Res}(Y_1, 2i)$. Si trova comunque

$$Y_1(s) = \frac{1}{4}\frac{1}{s^2} + \frac{3}{8}\frac{2}{s^2+4}$$

e quindi

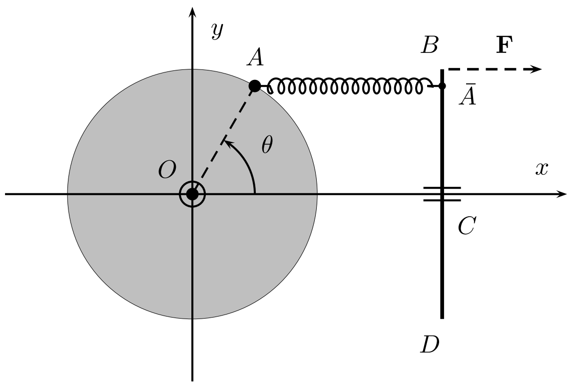
$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}Y_1(s) = \frac{1}{4}t + \frac{3}{8}\sin 2t.$$

La funzione incognita $y(t)$ sarà data allora da $\mathcal{L}^{-1}[e^{-s}Y_1(s)] = H(t-1)\, y_1(t-1)$ (sempre dalla formula 27.), quindi

$$y(t) = H(t-1)\left(\frac{1}{4}(t-1) + \frac{3}{8}\sin(2(t-1))\right).$$

□

Parte B



Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da un disco omogeneo di raggio R e massa $2m$ il cui centro è vincolato tramite una cerniera a un punto fisso O del piano. Sul bordo del disco è saldato un punto materiale A di massa m.

È presente inoltre un'asta BD di lunghezza $2R$ e massa m vincolata tramite un pattino a restare verticale, col suo punto medio C scorrevole lungo l'asse orizzontale passante per O.

Oltre alla forza peso, sul sistema agiscono: una molla ideale che collega il punto A al punto $\bar{A}$, con $\bar{A}$ proiezione orizzontale di A sull'asta BD; una forza costante $F = (mg, 0)$ applicata in B. La cerniera e il pattino si intendono privi di attrito. La costante elastica della molla è pari a $k = \sqrt{2}\,mg/R$.

Si scelga il sistema di riferimento in figura, in cui si ha $C = (s, 0)$, e si indichi con θ l'angolo formato da $\hat{\imath}$ (versore dell'asse x) e il vettore OA. Quindi:

1. determinare le coordinate dei punti rilevanti del sistema in funzione delle variabili lagrangiane s e θ,
2. calcolare il potenziale (o l'energia potenziale) totale,
3. determinare tutte le configurazioni di equilibrio del sistema,
4. studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate,
5. calcolare le forze di reazione vincolare in O e C, e il momento di reazione in C *in una delle due configurazioni di equilibrio* (si consiglia di eseguire il calcolo considerando separatamente l'equilibrio delle due parti del sistema, disco e asta).

---

1. I punti O e C, centri di massa del disco e dell'asta, sono già dati, abbiamo poi banalmente $OA = (R\cos\theta, R\sin\theta)$, $O\bar{A} = (s, R\sin\theta)$, $OB = (s, R)$. I punti $A, \bar{A}, B$ sono punti di applicazione di forze.

2. Le forze sono tutte conservative, il potenziale della forza peso applicata a disco e asta risulta pari alla costante zero, e non contribuisce al calcolo. Il potenziale della forza peso per A è dato da $U_A = -mgR\sin\theta$. Il potenziale della molla è dato da

$$U_{el} = -\frac{1}{2}k(A\bar{A})^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{mg}{R}(s - R\cos\theta)^2.$$

Il potenziale della forza costante F applicata a B è dato da $U_B = OB \cdot F = (s, R) \cdot (mg, 0) = mgs$. Otteniamo allora il potenziale totale

$$U(s, \theta) = mg(-R\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2R}(s - R\cos\theta)^2 + s)$$

Possiamo proseguire col calcolo degli equilibri e della loro stabilità anche trascurando il fattore comune **positivo** mg.

3. Troviamo gli equilibri eguagliando a zero le componenti lagrangiane delle forze $Q_s = \partial_s U$ e $Q_\theta = \partial_\theta U$.

$$\begin{cases} Q_s = -\frac{\sqrt{2}}{R}(s - R\cos\theta) + 1 = 0 \\ Q_\theta = -R\cos\theta - \sqrt{2}(s - R\cos\theta)\sin\theta = 0. \end{cases}$$

Possiamo ricavare $s - R\cos\theta = R/\sqrt{2}$ dalla prima equazione e sostituire nella seconda trovando $\cos\theta + \sin\theta = 0$ equivalente anche a $\tan\theta = -1$, con soluzioni

$$\theta = \frac{3}{4}\pi \to s + R\sqrt{2}/2 = R/\sqrt{2} \to s = 0; \quad \theta = -\frac{\pi}{4} \to s - R\sqrt{2}/2 = R/\sqrt{2} \to s = \sqrt{2}R$$

quindi abbiamo trovato le due configurazioni (s, θ) date da $(0, 3\pi/4)$ e $(\sqrt{2}R, -\pi/4)$.

4. Per studiare la stabilità dei due equilibri verifichiamo se il potenziale presenta un massimo stretto nei punti stessi. Questa condizione può essere verificata attraverso il controllo della negatività degli autovalori della matrice Hessiana H. Gli elementi di H sono dati dalle derivate parziali seconde $\partial_{ss}U = H_{ss}$, $\partial_{s\theta}U = H_{s\theta}$, $\partial_{\theta\theta}U = H_{\theta\theta}$ (a meno del fattore positivo mg)

$$H_{ss} = -\frac{\sqrt{2}}{R}, \quad H_{s\theta} = -\sqrt{2}\sin\theta, \quad H_{\theta\theta} = R\sin\theta - \sqrt{2}(s\cos\theta - R\cos^2\theta + R\sin^2\theta).$$

Condizione di negatività degli autovalori è che sia $H_{ss} < 0$ (e $H_{\theta\theta} < 0$) e il determinante $\det(H) > 0$. Notiamo che $H_{ss} = -\sqrt{2}/R < 0$ non dipendente da s o θ. Calcoliamo i valori delle altre due derivate nelle due configurazioni di equilibrio.

$$(s, \theta) = (0, 3\pi/4) \quad \to \quad H_{s\theta} = -1, \quad H_{\theta\theta} = R\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \det(H) = -2$$
$$(s, \theta) = (\sqrt{2}R, -\pi/4) \quad \to \quad H_{s\theta} = 1, \quad H_{\theta\theta} = -3R\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \det(H) = 2.$$

Quindi la prima configurazione è instabile e la seconda è stabile.

5. Notiamo che le due parti del sistema, cioè disco e asta, sono collegate da una molla, quindi sono soggette a una forza attiva e non un vincolo interno. Per calcolare le reazioni nei due vincoli esterni O e C è quindi possibile e anche conveniente applicare le equazioni cardinali della statica separatamente ai due corpi, nelle configurazioni di equilibrio.

Imponiamo intanto il bilancio delle forze sul disco (I eq. cardinale), indicando con $\Phi_O = \Phi_{Ox}\hat{\imath} + \Phi_{Oy}\hat{\jmath}$ la forza di reazione vincolare nella cerniera in O, unico vincolo agente sul disco, in cui ci aspettiamo di trovare sia una forza di reazione orizzontale che verticale.

$$\Phi_O + P_D + P_A + F_{el,A} = 0$$

dove P_D, P_A indicano la forza peso agente sul disco e sul punto A e $F_{el,A}$ indica la forza elastica agente su A. Notiamo che bisogna distinguere la forza agente su A e quella agente su $\bar{A}$ che saranno ovviamente uguali e opposte. Si tratta infatti di una forza *interna* al sistema, che rispetterà la terza legge della dinamica, con $F_{el,A} = -F_{el,\bar{A}}$.

$$\Phi_{Ox}\,\hat{\imath} + \Phi_{Oy}\,\hat{\jmath} - 2mg\,\hat{\jmath} - mg\,\hat{\jmath} - k(A - \bar{A}) = 0, \quad \to$$

$$\to \quad \Phi_{Ox}\,\hat{\imath} + \Phi_{Oy}\,\hat{\jmath} - 3mg\,\hat{\jmath} - \sqrt{2}\frac{mg}{R}(R\cos\theta - s)\,\hat{\imath} = 0.$$

Eguagliando a zero le due componenti si ha

$$\Phi_{Ox} = -\sqrt{2}\frac{mg}{R}(s - R\cos\theta), \quad \Phi_{Oy} = 3mg.$$

In entrambe le configurazioni troviamo infine $\Phi_{Ox} = -mg$ (un risultato prevedibile in quanto l'unica forza esterna orizzontale è la forza F di intensità mg e nel vincolo in C non sarà presente una reazione orizzontale trattandosi di un pattino).

Scriviamo ora la I eq. cardinale della statica per l'asta BD, che ci permetterà di trovare le forze di reazione agenti in C, unico vincolo dell'asta. Sia $\Phi_C = \Phi_{Cy}\,\hat{\jmath}$ la forza di reazione in C, e scriviamo

$$\Phi_C + P_a + F_{el,\bar{A}} + F = 0$$

dove P_a indica la forza peso agente sull'asta.

$$\Phi_{Cy}\,\hat{\jmath} - mg\,\hat{\jmath} - k(\bar{A} - A) + mg\,\hat{\imath} = 0, \quad \rightarrow$$

$$\Phi_{Cy}\,\hat{\jmath} - mg\,\hat{\jmath} - \sqrt{2}\frac{mg}{R}(s - R\cos\theta)\,\hat{\imath} + mg\,\hat{\imath} = 0.$$

In entrambe le configurazioni la componente orizzontale delle forze si annulla, come deve essere, e si ha poi $\Phi_{Cy} = mg$.

Rimane da calcolare il momento $M_C = M_{Cz}\,\hat{k}$ (con $\hat{k}$ versore dell'ase z perpendicolare al piano) di reazione in C, che impedisce la rotazione dell'asta BD nel piano. Per farlo imponiamo la II eq. cardinale, scegliendo come polo lo stesso punto C, e sommando i momenti di tutte le forze agenti sull'asta

$$M_C + C\bar{A} \times F_{el,\bar{A}} + CB \times F = 0,$$

dove manca il momento della forza peso F_a, avendo braccio nullo. Esplicitamente

$$M_{Cz}\,\hat{k} + (R\sin\theta\,\hat{\jmath}) \times (-\sqrt{2}\frac{mg}{R}(s - R\cos\theta)\,\hat{\imath}) + (R\,\hat{\jmath}) \times mg\,\hat{\imath} = 0.$$

Ricordando che $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -(\hat{\jmath} \times \hat{\imath}) = \hat{k}$, si ha, ad esempio nella configurazione $(\sqrt{2}R, -\pi/4)$,

$$M_{Cz}\,\hat{k} - \frac{\sqrt{2}}{2}mgR\,\hat{k} - mgR\,\hat{k} = 0,$$

e quindi $M_{Cz} = mgR(1 + \sqrt{2}/2)$. Invece nella configurazione $(0, 3\pi/4)$ si ha

$$M_{Cz}\,\hat{k} + \frac{\sqrt{2}}{2}mgR\,\hat{k} - mgR\,\hat{k} = 0,$$

e $M_{Cz} = mgR(1 - \sqrt{2}/2)$.