

## Università degli Studi di Catania

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale, A.A. 2024-2025

Compito di Fisica Matematica - 21 Gennaio 2025

---

Non è ammesso l'uso di appunti e dispositivi elettronici. Non è permesso allontanarsi dall'aula prima di avere consegnato il compito. Esibire documento d'identità. Tempo per svolgimento: 2h30m.

---

### Parte A

1. Classificare le singolarità al finito di  $f(z) = \frac{\sin(\pi z^2)}{(z^2 + z)^2}$ , e valutare  $\oint_{\gamma} f(z) dz$ , dove  $\gamma$  è la curva di equazione  $|z - i| = \pi/2$  percorsa nel verso positivo.

#### Svolgimento

Le singolarità della funzione sono date da  $(z^2 + z)^2 = z^2(z + 1)^2 = 0$ , quindi da  $z = 0$  e  $z = -1$ . Notiamo che per  $z = 0, -1$  anche il numeratore si annulla, quindi bisogna verificare attentamente il tipo di singolarità. Per  $z = 0$  si ha

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi z^2)}{z^2(z + 1)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \pi \frac{\sin(\pi z^2)}{\pi z^2} \frac{1}{(z + 1)^2} = \pi \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi z^2)}{\pi z^2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z + 1)^2} = \pi,$$

sfruttando le proprietà dei limiti e un limite notevole. Lo stesso risultato si potrebbe ottenere con un'applicazione diretta della regola di De L'Hopital. Si deduce che  $z = 0$  è una singolarità eliminabile. Per  $z = -1$  ripetiamo lo stesso calcolo, applicando l'Hopital una volta

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{\sin(\pi z^2)}{z^2(z + 1)^2} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\sin(\pi z^2)}{(z + 1)^2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{z^2} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{2\pi z \cos(\pi z^2)}{2(z + 1)} \rightarrow \frac{2\pi}{0} = \infty.$$

Quindi in  $z = -1$  abbiamo un polo, verifichiamo che l'ordine sia 1 (non può essere pari a 2 perché il numeratore si annulla), calcolando allo stesso tempo il residuo.

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z + 1) \frac{\sin(\pi z^2)}{z^2(z + 1)^2} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\sin(\pi z^2)}{z + 1} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{z^2} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{2\pi z \cos(\pi z^2)}{1} = 2\pi.$$

Controlliamo se l'unica singolarità con residuo non nullo, cioè  $z = -1$  si trova all'interno della circonferenza  $\gamma$ , cioè verifichiamo la disuguaglianza  $|-1 - i| < \pi/2$ . Notiamo che  $|-1 - i| = \sqrt{2} \approx 1.41$  e  $\pi/2 \approx 1.57$  quindi la disuguaglianza è verificata. Applicando il teorema dei residui otteniamo

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i 2\pi = 4\pi^2 i.$$

2. Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - 2y'' = H(t - 1) - H(t - 2) \\ y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = -1 \end{cases}$$

#### Svolgimento

Ricordando le proprietà della trasformata di Laplace, effettuiamo la trasformata dell'equazione

$$s^3 Y - s^2 - s + 1 - 2(s^2 Y - s - 1) = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} \rightarrow Y = \frac{s^2 - s - 3}{s^2(s - 2)} + e^{-s} \frac{1}{s^3(s - 2)} - e^{-2s} \frac{1}{s^3(s - 2)}.$$

Compagno due diverse funzioni razionali che possiamo sviluppare in fratti semplici come

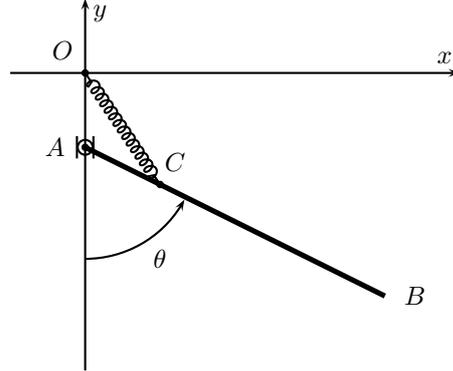
$$\frac{s^2 - s - 3}{s^2(s - 2)} = \frac{5}{4} \frac{1}{s} + \frac{3}{2} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{s - 2}; \quad \frac{1}{s^3(s - 2)} = -\frac{1}{8} \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{s^3} + \frac{1}{8} \frac{1}{s - 2}$$

Tenuto conto della formula di traslazione (27 in tabella) possiamo antitrasformare e ricavare

$$y(t) = \frac{5}{4} + \frac{3t}{2} - \frac{e^{2t}}{4} - H(t-1)\left(\frac{1}{8} + \frac{t-1}{4} + \frac{(t-1)^2}{4} - \frac{e^{2(t-1)}}{8}\right) + \\ + H(t-2)\left(\frac{1}{8} + \frac{t-2}{4} + \frac{(t-2)^2}{4} - \frac{e^{2(t-2)}}{8}\right)$$

Parte B

Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da un'asta omogenea di estremi  $A, B$ , con massa  $m$  e lunghezza  $|AB| = 4L$ . L'estremo  $A$  è vincolato a scorrere su un asse verticale tramite un carrello privo di attrito. Sul sistema, oltre alla forza peso, agisce una forza elastica  $F = -k(C - O) = kCO$  dove  $O$  è un punto fisso dell'asse verticale e  $C$  è un punto dell'asta tale che  $|AC| = L$ . La costante elastica  $k$  vale  $2mg/L$ . Si scelga il sistema di riferimento in figura, in cui si ha  $A = (0, h)$ , e si indichi con  $\theta$  l'angolo formato da  $-\hat{j}$  (l'opposto del versore dell'asse  $y$ ) e il vettore  $AB$ . Quindi:



- 1) determinare le coordinate dei punti rilevanti del sistema in funzione delle variabili lagrangiane  $h$  e  $\theta$ ,
- 2) calcolare il potenziale (o l'energia potenziale) totale,
- 3) determinare tutte le configurazioni di equilibrio del sistema,
- 4) studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate,
- 5) calcolare l'energia cinetica associata a un atto di moto del sistema.

#### Svolgimento

1) Definiamo  $G$  il punto medio dell'asta e suo centro di massa, quindi con  $|AG| = 2L$ . Tenuto conto della definizione di  $\theta$  abbiamo

$$AC = (L \sin \theta, -L \cos \theta), \quad AG = (2L \sin \theta, -2L \cos \theta)$$

$$OC = OA + AC = (L \sin \theta, h - L \cos \theta), \quad OG = OA + AG = (2L \sin \theta, h - 2L \cos \theta).$$

2) Abbiamo due forze conservative, la forza peso agente su  $G$  e la molla di lunghezza  $|OC|$  agente su  $C$ . Ricaviamo i potenziali

$$U_G = -mg y_G = -mg(h - 2L \cos \theta), \quad U_C = -\frac{1}{2} \frac{2mg}{L} |OC|^2 = -\frac{mg}{L} (h^2 - 2hL \cos \theta + L^2).$$

Il potenziale totale sarà allora

$$U = mg(-h + 2L \cos \theta - \frac{1}{L} h^2 + 2h \cos \theta - L).$$

3) Ricaviamo le forze generalizzate

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial h} = mg(-1 - \frac{2}{L} h + 2 \cos \theta) \\ Q_\theta = \frac{\partial U}{\partial \theta} = mg(-2L \sin \theta - 2h \sin \theta)$$

e le eguagliamo a zero, eliminando il fattore costante  $mg$ , quindi cerchiamo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -1 - \frac{2}{L}h + 2 \cos \theta = 0 \\ -2L \sin \theta - 2h \sin \theta = -2(L+h) \sin \theta = 0. \end{cases}$$

Tenendo conto della legge di annullamento del prodotto, dalla seconda equazione ricaviamo soluzioni date da  $L+h=0$  o da  $\sin \theta = 0$ . Consideriamo separatamente i due casi.

Nel primo caso si ha  $h = -L$  e sostituendo  $h$  nella prima equazione otteniamo

$$-1 + 2 + 2 \cos \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \cos \theta = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = \pm \frac{2}{3}\pi,$$

quindi due soluzioni  $(h, \theta)$  date da  $(-L, \frac{2}{3}\pi)$ ,  $(-L, -\frac{2}{3}\pi)$ , si tratta di due soluzioni speculari rispetto all'asse  $y$ .

Nel secondo caso abbiamo  $\sin \theta = 0$  quindi  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ . Sostituendo i due valori nella prima equazione troviamo

$$\theta = 0 \quad \rightarrow \quad -1 - \frac{2h}{L} + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{2}L,$$

$$\theta = \pi \quad \rightarrow \quad -1 - \frac{2h}{L} - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad h = -\frac{3}{2}L,$$

quindi altre due soluzioni date da  $(\frac{1}{2}L, 0)$  e  $(-\frac{3}{2}L, \pi)$  in cui l'asta è verticale.

4) Per studiare la stabilità verifichiamo se il potenziale abbia un massimo nelle configurazioni di equilibrio. Cerchiamo la matrice Hessiana di  $U$  (a meno del fattore costante **positivo**  $mg$ , definiamo  $U' = U/mg$ ), ricaviamo quindi le derivate seconde del potenziale.

$$U'_{hh} = \frac{\partial^2 U'}{\partial h^2} = -\frac{2}{L}, \quad U'_{h\theta} = \frac{\partial^2 U'}{\partial h \partial \theta} = -2 \sin \theta, \quad U'_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 U'}{\partial \theta^2} = -2(L+h) \cos \theta.$$

La matrice Hessiana  $H$  è data quindi da

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{2}{L} & -2 \sin \theta \\ -2 \sin \theta & -2(L+h) \cos \theta \end{pmatrix}$$

La condizione di stabilità è che entrambi gli autovalori siano negativi, che è equivalente per una matrice simmetrica  $2 \times 2$  alla condizione  $H_{11} < 0$  e  $\det(H) > 0$ . Abbiamo sempre  $H_{11} < 0$ , calcoliamo il determinante

$$\det(H) = 4 \frac{L+h}{L} \cos \theta - 4 \sin^2 \theta.$$

Calcoliamo il valore del determinante ordinatamente nelle quattro soluzioni trovate.

$$(-L, \pm \frac{2}{3}\pi) \rightarrow \det(H) = -3, \quad (\frac{1}{2}L, 0) \rightarrow \det(H) = 6, \quad (-\frac{3}{2}L, \pi) \rightarrow \det(H) = -2.$$

Quindi solo la configurazione  $(\frac{1}{2}L, 0)$  è stabile.

5) L'energia cinetica è data solo dal moto dell'asta, unico corpo materiale del sistema. Il moto non è traslatorio e neanche rotatorio attorno a un punto fisso, quindi impieghiamo il teorema di Koenig scomponendo l'energia cinetica in un termine di moto del centro di massa e un termine di rotazione dell'asta attorno allo stesso  $G$ .

$$T = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

dove la velocità angolare  $\omega$  è data da  $\dot{\theta}$ , il momento d'inerzia  $I$  dell'asta è dato da  $I = \frac{1}{12}m(4L)^2 = \frac{4}{3}mL^2$  e  $V_G$  si ricava come derivata delle coordinate di  $G$  rispetto al tempo

$$V_G = \dot{OG} = (2L\dot{\theta} \cos \theta, \dot{h} + 2L\dot{\theta} \sin \theta), \quad V_G^2 = 4L^2\dot{\theta}^2 + \dot{h}^2 + 4L\dot{h}\dot{\theta} \sin \theta.$$

Complessivamente ricaviamo

$$T = \frac{1}{2}m(4L^2\dot{\theta}^2 + \dot{h}^2 + 4L\dot{h}\dot{\theta} \sin \theta) + \frac{1}{2} \frac{4}{3}mL^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{h}^2 + \frac{8}{3}mL^2\dot{\theta}^2 + 2mL\dot{h}\dot{\theta} \sin \theta.$$

**Table of Laplace Transforms**

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. $e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. $\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12. $\sin(at) + at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13. $\cos(at) - at \sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14. $\cos(at) + at \sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	16. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
17. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23. $t^n e^{at}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
25. $u_c(t) = u(t-c)$ <a href="#">Heaviside Function</a>	$\frac{e^{-cs}}{s}$	26. $\delta(t-c)$ <a href="#">Dirac Delta Function</a>	$e^{-cs}$
27. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	28. $u_c(t)g(t)$	$e^{-cs}\mathcal{L}\{g(t+c)\}$
29. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30. $t^n f(t), n=1,2,3,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31. $\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)du$	32. $\int_0^t f(v)dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	34. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$
35. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	36. $f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
37. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		