Università degli Studi di Catania

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale, A.A. 2022-2023
Compito di Fisica Matematica - 8 Maggio 2023

1. Calcolare attraverso il teorema dei residui l'integrale:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta+\cos\theta}.$$

Svolgimento
Si tratta di un integrale sull'intervallo $[0, 2\pi]$ di una funzione razionale di seni e coseni della variabile. In questo caso, attravero la sostituzione $z = e^{i\theta}$ e ricordando che si ha, come conseguenza della formula di Eulero,

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}, \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},$$

otteniamo

$$\sin\theta = \frac{z-1/z}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}, \quad \cos\theta = \frac{z+1/z}{2} = \frac{z^2+1}{2z}, \quad dz = ie^{i\theta}d\theta \to d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

L'integrazione in θ sull'intervallo $[0, 2\pi]$ diventa l'integrazione in z sulla circonferenza C data da $|z| = 1$. Sostituendo e semplificando otteniamo

$$\oint_C \frac{2}{(1+i)z^2+4iz+i-1}\,dz.$$

Per applicare il teorema dei residui cerchiamo le singolarità dell'integrando interne a C e ne calcoliamo i residui. Il denominatore ha le radici

$$z_\pm = \frac{-2i \pm i\sqrt{2}}{1+i} \quad \text{con} \quad |z_\pm| = \left|\frac{-2i \pm i\sqrt{2}}{1+i}\right| = \frac{|-2\pm\sqrt{2}|}{|1+i|} = \frac{|-2\pm\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = |-\sqrt{2}\pm 1|,$$

quindi $|z_+| = \sqrt{2}-1 < 1$, e $|z_-| = \sqrt{2}+1 > 1$ e l'unica radice interna a C è z_+.

In corrispondenza delle due radici abbiamo due poli semplici, ed è conveniente sfruttare la formula per il calcolo del residuo **in un polo semplice** z_0 di un rapporto di funzioni

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}, \text{ con } D(z_0) = 0, N(z_0) \neq 0 \quad \to \quad \mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{N(z_0)}{D'(z_0)}.$$

Quindi valutiamo, con qualche passaggio,

$$\left.\frac{2}{2(1+i)z+4i}\right|_{z=z_+} = -i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e infine

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta+\cos\theta} = \oint_C \frac{2\,dz}{(1+i)z^2+4iz+i-1} = 2\pi i\left(-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi\sqrt{2}.$$

2. Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 1 - H(t-2) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento
Calcoliamo la trasformata di Laplace dei vari termini dell'equazione, tenendo conto anche dei dati iniziali (formula 37 nella tabella allegata)

$$\mathcal{L}(y'') = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 1, \quad \mathcal{L}(y') = sY, \quad Y = \mathcal{L}(y),$$

e inoltre (formule 1 e 27 in tabella)

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}(H(t-2)) = e^{-2s}\frac{1}{s}.$$

Sostituendo e ordinando otteniamo

$$(s^2 + 2s + 5)Y - 1 = \frac{1}{s} - e^{-2s}\frac{1}{s} \quad \text{e quindi}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} + \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} - e^{-2s}\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Il primo termine a secondo membro può essere antitrasformato con semplici passaggi algebrici e tenendo conto delle trasformate note (formula 19 in tabella)

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 2s + 5}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}\right) = \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t).$$

Gli altri due termini, definendo la funzione

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{1}{s((s+1)^2 + 4)},$$

possono essere scritti come $F(s)$ e $-e^{-2s}F(s)$. Per procedere al calcolo dell'antitrasformata è necessario scomporre in fratti semplici la $F(s)$.

Le radici del denominatore di $F(s)$ sono date dalla radice reale semplice $s = 0$ e dalla coppia di radici complesse coniugate $-1 \pm 2i$. È possibile procedere in vari modi per la scomposizione in fratti semplici, in questo caso imponiamo la seguente identità

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 5}.$$

Possiamo ricavare A come residuo della $F(s)$ in $s = 0$, ovvero calcolando

$$A = sF(s)|_{s=0} = \left.\frac{1}{s^2 + 2s + 5}\right|_{s=0} = \frac{1}{5}.$$

Consideriamo poi il limite per $s \to \infty$ della formula della scomposizione moltiplicata per s, ovvero

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty}\left(s\frac{A}{s} + s\frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 5}\right) \quad \to \quad 0 = A + B, \quad \to \quad B = -\frac{1}{5}.$$

Possiamo ricavare C imponendo l'identità dello sviluppo in fratti semplici per un valore arbitrario di s che non sia radice del denominatore, ad esempio $s = -1$, e tenendo conto dei valori già calcolati di A e B,

$$F(-1) = \frac{1}{-1(4)} \quad \to \quad -\frac{1}{4} = \frac{A}{-1} + \frac{-B + C}{4} \quad \to \quad -\frac{1}{4} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4}(C + \frac{1}{5}) \quad \to \quad C = -\frac{2}{5}.$$

Abbiamo quindi

$$F(s) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2+2^2}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} - \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right),$$

dove abbiamo scomposto con semplici passaggi la seconda frazione in somma di frazioni con antitrasformata nota (formule 19 e 20 in tabella). Procediamo allora al calcolo dell'antitrasformata di $F(s)$,

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-t}\cos(2t) - \frac{1}{10}e^{-t}\sin(2t).$$

Il terzo termine della formula per $Y(s)$, ovvero $-e^{-2s}F(s)$, ha come antitrasformata il segnale $-y_2(t)$ traslato di 2 (in base a una nota formula di traslazione, formula 27 in tabella), cioè

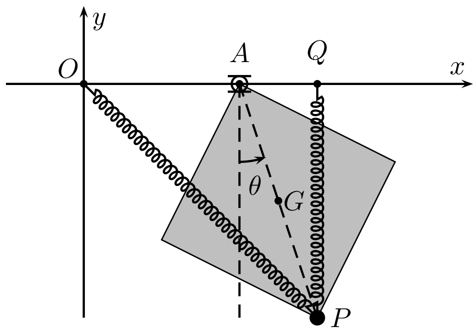
$$y_3(t) = -\mathcal{L}^{-1}(e^{-2s}F(s)) = -H(t-2)\,y_2(t-2) =$$

$$= -H(t-2)\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-(t-2)}\cos(2(t-2)) - \frac{1}{10}e^{-(t-2)}\sin(2(t-2))\right),$$

con soluzione complessiva dell'equazione differenziale

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t).$$

3. Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da una lamina quadrata omogenea di massa $2m$, avente diagonale lunga $2\,L$. Il vertice A è vincolato tramite un carrello liscio a scorrere su un asse orizzontale. Al vertice P, opposto ad A, è saldato un corpo puntiforme di massa m. Oltre alla forza peso, sul sistema agiscono due forza elastiche, $\mathbf{F_1} = -k_1(P-O) = k_1 PO$ e $\mathbf{F_2} = -k_2(P-Q) = k_2 PQ$ applicate al punto P, con O punto fisso dell'asse orizzontale, e Q proiezione ortogonale di P sull'asse orizzontale. Le costanti elastiche valgono $k_1 = \frac{mg}{2L}$ e $k_2 = \frac{3mg}{2L}$.



Assunti il sistema di riferimento in figura, il punto A di coordinate $(s, 0)$, e l'angolo θ anch'esso come da figura (ovvero l'angolo formato dai vettori $-\hat{\jmath}$ e AP), determinare:
1) Le coordinate dei punti rilevanti del sistema in funzione delle variabili lagrangiane s e θ.
2) Il potenziale (o l'energia potenziale) totale delle forze.
3) Tutte le configurazioni di equilibrio del sistema.
4) La stabilità della configurazione di equilibrio $(s,\theta) = (-\sqrt{3}L, \frac{\pi}{3})$.
5) L'energia cinetica totale del sistema.

Nota: Momento d'inerzia di una lamina quadrata di massa M e lato ℓ rispetto a un asse ortogonale alla lamina e passante per il suo centro, $I = \frac{1}{6}M\ell^2$.

Svolgimento

1) Conosciamo le coordinate di $A = (s, 0)$, e la lunghezza del segmento AP, con $|AP| = 2L$. Il punto medio di AP che possiamo chiamare G, è il baricentro della lamina, e sarà quindi $|AG| = L$. L'angolo θ ha origine lungo la direzione negativa dell'asse y (quindi il versore $-\hat{\jmath}$), per esprimere il vettore $(P-A)$ attraverso θ, consideriamo che $(P-A)$ forma

con la direzione positiva dell'asse delle ascisse (quindi col versore $\hat{\imath}$) un angolo $\phi = \frac{3}{2}\pi + \theta$, sarà quindi

$$(P - A) = \left(2L\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right), 2L\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)\right) = (2L\sin\theta, -2L\cos\theta),$$

e analogamente

$$(G - A) = (L\sin\theta, -L\cos\theta).$$

Abbiamo quindi

$$(P - O) = (P - A) + (A - O) = (2L\sin\theta, -2L\cos\theta) + (s, 0) = (s + 2L\sin\theta, -2L\cos\theta)$$

$$(G - O) = (G - A) + (A - O) = (L\sin\theta, -L\cos\theta) + (s, 0) = (s + L\sin\theta, -L\cos\theta)$$

Inoltre il punto P' avrà l'ascissa di P e ordinata nulla, quindi

$$(P' - O) = (s + 2L\sin\theta, 0) \quad \text{ed è anche} \quad (P - P') = (0, -2L\cos\theta).$$

2) Le forze attive che agiscono sul sistema sono tutte conservative, ovvero le due forze peso agenti sulla lamina e sul punto P, e le due forze elastiche. Indicando con U_L e U_P il potenziale della forza peso agente rispettivamente sulla lamina e sul punto, abbiamo

$$U_L = -2mg\, y_G = 2mgL\cos\theta, \quad U_P = -mg\, y_P = 2mgL\cos\theta.$$

Per le due forze elastiche ricaviamo

$$U_{el1} = -\frac{1}{2}\, k_1\, (P - O)^2 = -\frac{1}{2}\frac{mg}{2L}(s^2 + 4Ls\sin\theta + 4L^2)$$

$$U_{el2} = -\frac{1}{2}\, k_2\, (P - P')^2 = -\frac{1}{2}\frac{3mg}{2L}(4L^2\cos^2\theta)$$

e sommando i quattro potenziali trovati

$$U = 4mgL\cos\theta - \frac{1}{4}\frac{mg}{L}s^2 - mgs\sin\theta - mgL - 3mgL\cos^2\theta.$$

3) Per ricavare le configurazioni di equilibrio calcoliamo le componenti lagrangiane delle forze e le uguagliamo a zero. Possiamo trascurare nel calcolo il fattore comune mg.

$$\begin{cases} Q_s = \frac{\partial U}{\partial s} = -\frac{1}{2L}s - \sin\theta = 0 \quad \to \quad s = -2L\sin\theta \\ Q_\theta = \frac{\partial U}{\partial \theta} = -4L\sin\theta - s\cos\theta + 6L\sin\theta\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Sostituendo s nella seconda equazione ricaviamo

$$-4L\sin\theta + 2L\sin\theta\cos\theta + 6L\sin\theta\cos\theta = 0 \quad \to \quad 4L\sin\theta(-1 + 2\cos\theta) = 0.$$

Le soluzioni della precedente equazione sono date da $\sin\theta = 0$ e $\cos\theta = \frac{1}{2}$, cioè

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi, \quad \theta_3 = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_4 = -\frac{\pi}{3}.$$

Calcolando il corrispondente valore di s attraverso la prima equazione, troviamo le quattro configurazioni di equilibrio (s, θ)

$$(0, 0), \quad (0, \pi), \quad (-\sqrt{3}\, L, \frac{\pi}{3}), \quad (\sqrt{3}\, L, -\frac{\pi}{3}).$$

4) Per valutare la stabilità di $(-\sqrt{3}\,L, \frac{\pi}{3})$ controlliamo se il potenziale presenti un massimo in tale configurazione. Essendo U una funzione di due variabili questa condizione corrisponde ad avere una matrice Hessiana con autovalori entrambi negativi. Calcoliamo le derivate seconde necessarie. Anche in questo calcolo possiamo trascurare il fattore comune **positivo** mg.

$$U_{ss} = \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = -\frac{1}{2L}$$

$$U_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -4L\cos\theta + s\sin\theta + 6L(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$U_{s\theta} = U_{\theta s} = \frac{\partial^2 U}{\partial s\, \partial \theta} = -\cos\theta$$

Valutando le espressioni nella configurazione desiderata abbiamo

$$U_{\theta\theta}(-\sqrt{3}\,L, \frac{\pi}{3}) = -2L - \frac{3}{2}L + 6L\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = -\frac{13}{2}L$$

$$U_{s\theta}(-\sqrt{3}\,L, \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}.$$

La matrice Hessiana è data allora da

$$H(-\sqrt{3}\,L, \frac{\pi}{3}) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2L} & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{13}{2}L \end{pmatrix}$$

con determinante $Det(H) = 3 > 0$ e traccia $Tr(H) < 0$. Il determinante positivo ci assicura che gli autovalori hanno lo stesso segno (essendo pari al prodotto degli autovalori) e la traccia negativa (essendo pari alla somma degli autovalori) implica quindi che gli autovalori sono entrambi negativi e la configurazione è stabile.

5) Il sistema è costituito da due corpi materiali, cioè la lamina e il punto, di cui calcoliamo separatamente l'energia cinetica, rispettivamente T_L e T_P.

La lamina non è in rotazione attorno a un punto fisso e non compie un moto puramente traslatorio, ma ha un moto "rototraslatorio". Sfruttiamo il teorema di Koenig, scomponendo la sua energia cinetica in un termine traslatorio di energia cinetica del centro di massa G, come punto di massa $2m$, e un termine di energia cinetica nel riferimento del centro di massa che risulta un moto di rotazione attorno a G dal momento che la lamina è un corpo rigido. Abbiamo quindi

$$T_L = \frac{1}{2}\,2m\,v_G^2 + \frac{1}{2}\,I_G\,\dot{\theta}^2$$

dove v_G indica la velocità di G, I_G è il momento d'inerzia della lamina rispetto al suo asse di rotazione (parallelo necessariamente all'asse z poiché si tratta di un moto piano) passante per G, $\dot{\theta}$ corrisponde alla velocità angolare del moto attorno all'asse.

Ricordiamo l'espressione di G e la deriviamo rispetto al tempo, assumendo che le variabili s, θ siano funzioni del tempo

$$G = (s + L\sin\theta, -L\cos\theta) \quad \rightarrow \quad v_G = \dot{G} = (\dot{s} + L\,\dot{\theta}\cos\theta, L\,\dot{\theta}\sin\theta)$$

e quindi

$$\frac{1}{2}\,2m\,v_G^2 = m\dot{s}^2 + 2mL\,\dot{s}\,\dot{\theta}\cos\theta + mL^2\dot{\theta}^2.$$

Il momento d'inerzia viene suggerito dal testo, ed essendo il lato della lamina pari a $2L/\sqrt{2} = \sqrt{2}L$, risulta

$$I_G = \frac{1}{6} 2m(\sqrt{2}L)^2 = \frac{2}{3} mL^2,$$

quindi complessivamente

$$T_L = m\dot{s}^2 + 2mL\,\dot{s}\,\dot{\theta}\cos\theta + mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{3}mL^2\,\dot{\theta}^2 = m\dot{s}^2 + 2mL\dot{s}\,\dot{\theta}\cos\theta + \frac{4}{3}mL^2\dot{\theta}^2$$

Rimane da valutare l'energia cinetica del punto P pari a $\frac{1}{2}mv_P^2$, con $v_P = \dot{P}$. Il calcolo è analogo al calcolo di v_G e porta a

$$v_P = (\dot{s} + 2L\,\dot{\theta}\cos\theta, 2L\,\dot{\theta}\sin\theta) \quad \rightarrow \quad v_P^2 = \dot{s}^2 + 4L\,\dot{s}\,\dot{\theta}\cos\theta + 4L^2\dot{\theta}^2$$

e quindi

$$T_P = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + 2mL\,\dot{s}\,\dot{\theta}\cos\theta + 2mL^2\dot{\theta}^2 \quad \text{e} \quad T = T_L + T_P.$$

Table of Laplace Transforms

	$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$		$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\dfrac{1}{s}$	2.	$\mathbf{e}^{at}$	$\dfrac{1}{s-a}$
3.	$t^n,\quad n=1,2,3,\ldots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	4.	$t^p,\ p>-1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5.	$\sqrt{t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6.	$t^{n-\frac{1}{2}},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7.	$\sin(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	8.	$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
9.	$t\sin(at)$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10.	$t\cos(at)$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11.	$\sin(at)-at\cos(at)$	$\dfrac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12.	$\sin(at)+at\cos(at)$	$\dfrac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13.	$\cos(at)-at\sin(at)$	$\dfrac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14.	$\cos(at)+at\sin(at)$	$\dfrac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15.	$\sin(at+b)$	$\dfrac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$	16.	$\cos(at+b)$	$\dfrac{s\cos(b)-a\sin(b)}{s^2+a^2}$
17.	$\sinh(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	18.	$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
19.	$\mathbf{e}^{at}\sin(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20.	$\mathbf{e}^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21.	$\mathbf{e}^{at}\sinh(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22.	$\mathbf{e}^{at}\cosh(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23.	$t^n\mathbf{e}^{at},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24.	$f(ct)$	$\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right)$
25.	$u_c(t)=u(t-c)$ Heaviside Function	$\dfrac{\mathbf{e}^{-cs}}{s}$	26.	$\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	$\mathbf{e}^{-cs}$
27.	$u_c(t)f(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}F(s)$	28.	$u_c(t)g(t)$	$\mathbf{e}^{-cs}\mathfrak{L}\{g(t+c)\}$
29.	$\mathbf{e}^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30.	$t^n f(t),\quad n=1,2,3,\ldots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31.	$\dfrac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,du$	32.	$\int_0^t f(v)\,dv$	$\dfrac{F(s)}{s}$
33.	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	34.	$f(t+T)=f(t)$	$\dfrac{\int_0^T \mathbf{e}^{-st}f(t)\,dt}{1-\mathbf{e}^{-sT}}$
35.	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	36.	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
37.	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$			