Corso di Laurea in Ingegneria Industriale.
Compito di Fisica Matematica del 23 Giugno 2014.

Parte A

Punto 1). Classificare le singolarità al finito di $f(z) = \dfrac{1}{(e^{2\pi z}-1)(z-1)}$ e calcolarne i residui. Valutare $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\,dz$, dove γ è la circonferenza di centro $\frac{1}{2}(1+i)$ e raggio 1 percorsa nel verso positivo.

Soluzione.
Le uniche singolarità sono date dall'annullamento del denominatore, cioè da $z=1$, $e^{2\pi z}=1$. Notiamo che in campo complesso $\log 1 = 2k\pi i$, con k intero relativo (quindi non solamente $\log 1 = 0$), e le altre singolarità sono date allora da $2\pi z = 2k\pi i$ e quindi $z_k = ki$. E' evidente che $\lim_{z\to 1} f(z) = \infty$, $\lim_{z\to z_k} f(z) = \infty$, tutte le singolarità sono allora poli. Verifichiamo che si tratta di poli del primo ordine

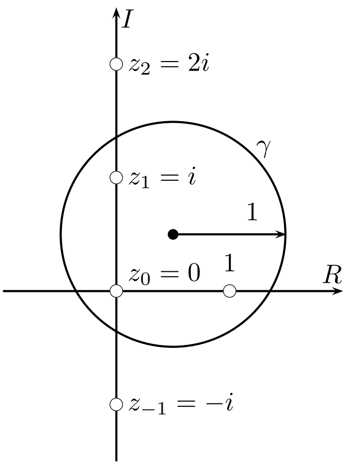
$$\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{1}{e^{2\pi z}-1} = \frac{1}{e^{2\pi}-1},$$

il limite è una quantità finita e non nulla, quindi il polo è del primo ordine e la quantità trovata è anche il residuo in $z=1$. Verifichiamo allo stesso modo la natura di z_k

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)f(z) = \lim_{z\to ki}\frac{z-ki}{(e^{2\pi z}-1)(z-1)} \to \frac{0}{0},$$

otteniamo una forma indeterminata e procediamo applicando il teorema di de l'Hôpital

$$\lim_{z\to ki}\frac{z-ki}{(e^{2\pi z}-1)(z-1)} \overset{H}{=} \lim_{z\to ki}\frac{1}{2\pi e^{2\pi z}(z-1)+(e^{2\pi z}-1)} = \frac{1}{2\pi(ki-1)} = -\frac{1+ki}{2\pi(1+k^2)}.$$



Anche i valori $z_k = ki$ sono poli del primo ordine con residuo pari alla quantità sopra calcolata.
Per il calcolo dell'integrale sulla circonferenza γ, vediamo quali dei poli di $f(z)$ appena trovati ricadono all'interno di essa, attraverso un'analisi grafica e, se è il caso, anche analitica. Il punto $z=1$ ricade entro γ (distanza da $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ pari a $\sqrt{2}/2 < 1$), come pure i punti $z_0 = 0, z_1 = i$. La distanza di $z_2 = 2i$ o $z_{-1} = -i$ dal centro della circonferenza è $\sqrt{5/2} > 1$, come era abbastanza evidente, quindi gli unici punti ricandenti all'interno di γ sono $z=1$, $z=0$, $z=i$. Un procedimento più generale sarebbe studiare la disequazione $|z_k - \frac{1}{2}(1+i)| < 1$.
Per il teorema dei residui abbiamo quindi (tenendo conto anche del fatto che la circonferenza è percorsa nel verso positivo, cioè antiorario)

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{e^{2\pi}-1} - \frac{1}{2\pi} - \frac{1+i}{4\pi}\right) = \frac{2\pi i}{e^{2\pi}-1} + \frac{1}{2}(1-3i).$$

Punto 2a). Classificare le singolarità al finito di $g(z) = \dfrac{\sin i\pi z}{z^4-16}$ e calcolarne i residui.

Soluzione.
Anche in questo caso le singolarità nascono solo dall'annullamento del denominatore, quindi da $z^4 - 16 = 0$. Potremmo cercare le radici quarte (complesse) di 16 attraverso la formula di De Moivre, ma basta notare che $z^4-16 = (z^2-4)(z^2+4) = (z-2)(z+2)(z-2i)(z+2i)$ per ricavare le quattro radici semplici $z_{1,2} = \pm 2$, $z_{3,4} = \pm 2i$. Notiamo ora che il numeratore si annulla per $z = z_{3,4}$, infatti $\sin(i\pi z_{3,4}) = \sin(\mp 2\pi) = 0$, quindi verifichiamo la natura delle singolarità $z_{3,4}$ calcolando

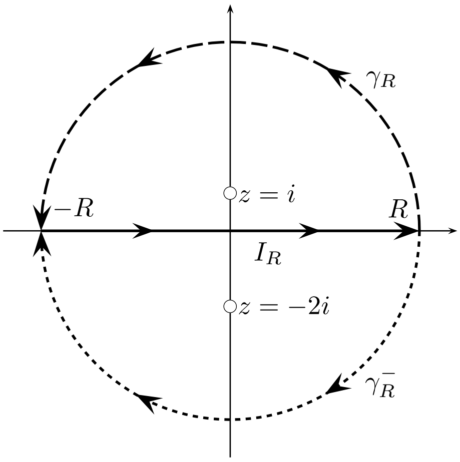
$$\lim_{z\to 2i} g(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{\sin i\pi z}{z^4-16} \overset{H}{=} \lim_{z\to 2i}\frac{i\pi\cos i\pi z}{4z^3} = \frac{i\pi}{-32i} = -\frac{\pi}{32},$$

dove abbiamo applicato il teorema di de l'Hôpital al secondo passaggio dopo avere ottenuto la forma indeterminata 0/0. Possiamo ripetere un calcolo analogo per $z \to -2i$, e concludiamo quindi che $z = \pm 2i$ sono singolarità eliminabili in quanto il limite della funzione nelle singolarità esiste ed è finito. Abbiamo invece

$$\lim_{z\to 2} g(z) = \lim_{z\to 2}\frac{\sin i\pi z}{z^4-16} \to \frac{\sin(2\pi i)}{0},$$

dove $\sin(2\pi i)$ è una quantità finita e non nulla, infatti $\sin(2\pi i) = (e^{-2\pi} - e^{2\pi})/(2i) \neq 0$, ricordando le relazioni
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$
Il precedente limite è quindi divergente, $\lim_{z\to 2} g(z) = \infty$, ed anche $\lim_{z\to -2} g(z) = \infty$, e le due singolarità $z_{1,2}$ sono quindi poli, necessariamente del primo ordine in quanto radici semplici del denominatore. Calcoliamo allora i residui
$$\mathrm{Res}(g(z), 2) = \lim_{z\to 2}(z-2)g(z) = \left.\frac{\sin(i\pi z)}{4z^3}\right|_{z=2} = \frac{\sin(2\pi i)}{32} = \frac{e^{-2\pi} - e^{2\pi}}{(2i)32} = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{64} i.$$
Qui abbiamo sfruttato la formula (utile per il calcolo dei residui nei poli *del primo ordine*)
$$\lim_{z\to \bar z}(z - \bar z)\frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(\bar z)}{D'(\bar z)},$$
dove si intende che $D(\bar z) = 0$, $N(\bar z) \neq 0$. Con calcolo simile si verifica che anche
$$\mathrm{Res}(g(z), -2) = \lim_{z\to -2}(z+2)g(z) = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{64} i.$$
Riassumendo, $z = \pm 2i$ sono singolarità eliminabili, $z = \pm 2$ sono poli del primo ordine con residuo $i(e^{2\pi} - e^{-2\pi})/64$.

Punto 2b). Calcolare la trasformata di Fourier di $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + ix + 2}$.
Soluzione.



Dobbiamo calcolare l'integrale sull'asse reale
$$\hat h(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2 + ix + 2}\, dx.$$
Notiamo che il prolungamento complesso $h(z)$ della funzione $h(x)$ soddisfa le ipotesi del lemma di Jordan (sia sull'arco $[0,\pi]$ che $[\pi, 2\pi]$), ovvero che
$$\lim_{z\to\infty} |h(z)| = 0,$$
e quindi, ponendo $f(z) = e^{-i\omega z} h(z)$, valgono
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0 \quad \text{per } \omega \leq 0,$$
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^-} f(z)dz = 0 \quad \text{per } \omega \geq 0,$$
dove γ_R e γ_R^- sono le semicirconferenze di raggio R con centro nell'origine contenute rispettivamente nel semipiano immaginario positivo e negativo.
Possiamo valutare allora l'integrale attraverso il teorema dei residui applicato a una delle due curve $\Gamma_R = I_R \cup \gamma_R$ e $\Gamma_R^- = I_R \cup \gamma_R^-$ (dove $I_R = [-R, R]$) rispettivamente per $\omega \leq 0$ e $\omega \geq 0$, e facendo tendere $R \to \infty$. Notiamo che le singolarità dell'integrando sono date dalle soluzioni di $z^2 + iz + 2 = 0$, e quindi $z = i$, $z = -2i$, e inoltre che la curva Γ_R è percorsa nel verso positivo (antiorario) e la curva Γ_R^- nel verso negativo (orario). Si ha quindi
$$\begin{aligned} \hat h(\omega) &= 2\pi i\, \mathrm{Res}(f(z), i) && \text{per } \omega \leq 0 \\ \hat h(\omega) &= -2\pi i\, \mathrm{Res}(f(z), -2i) && \text{per } \omega \geq 0. \end{aligned}$$
I residui si valutano facilmente, essendo $z = i, z = -2i$ poli del primo ordine di $f(z)$,
$$\mathrm{Res}(f(z), i) = \left.\frac{e^{-i\omega z}}{2z + i}\right|_{z=i} = \frac{e^{\omega}}{3i}, \quad \mathrm{Res}(f(z), -2i) = \left.\frac{e^{-i\omega z}}{2z + i}\right|_{z=-2i} = \frac{e^{-2\omega}}{-3i},$$
e quindi
$$\hat h(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi e^{\omega} & \text{per } \omega \leq 0 \\ \frac{2}{3}\pi e^{-2\omega} & \text{per } \omega \geq 0. \end{cases}$$

Punto 3). Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \sin t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione.
Consideriamo la trasformata di Laplace di ambo i membri dell'equazione. Definendo $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ ricaviamo $\mathcal{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 1$, $\mathcal{L}[y'] = sY - y(0) = sY$, inoltre $\mathcal{L}[e^{-t}\sin(t)] = 1/((s+1)^2+1)$, e quindi, dopo alcuni passaggi,

$$(s^2+2s+5)Y(s) - 1 = \frac{1}{s^2+2s+2}, \quad Y(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}.$$

I due fattori a denominatore possono essere scritti come $(s+1)^2+1$, $(s+1)^2+4$ e hanno quindi radici complesse coniugate $-1 \pm i$ e $-1 \pm 2i$.
Possiamo cercare una decomposizione in fratti semplici del tipo

$$\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{As+B}{s^2+2s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+5},$$

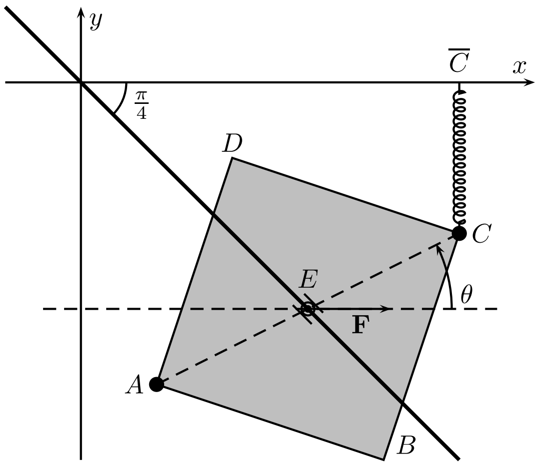
e ricavare, dopo avere moltiplicato l'equazione per $(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)$ e avere applicato il principio d'identità dei polinomi, $A = 0$, $B = \frac{1}{3}$, $C = 0$, $D = \frac{2}{3}$.
La soluzione $y(t)$ sarà data quindi dalla somma delle antitrasformate

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{(s+1)^2+1}\right] = \frac{1}{3}e^{-t}\sin(t), \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right] = \frac{1}{3}e^{-t}\sin(2t),$$

quindi $y(t) = \frac{1}{3}e^{-t}(\sin(t) + \sin(2t))$.

Parte B

Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da una lamina quadrata omogenea $ABCD$ di lato $\sqrt{2}L$ e massa m, il cui centro E è vincolato, tramite una cerniera liscia, a scorrere su una retta inclinata come da figura. Alla lamina sono saldati un punto di massa m in A e un punto di massa $2m$ in C. Oltre alla forza peso, sul sistema agisce una forza elastica $\mathbf{F}_{el} = -4\frac{mg}{L}(C-\overline{C})$, dove $\overline{C}$ è la proiezione di C su un asse fisso orizzontale, e una forza costante orizzontale $\mathbf{F} = (2mg, 0)$, applicata al centro E della lamina. Assunto il sistema di riferimento indicato, posta s l'ascissa di E, e quindi $E = (s, -s)$, ed utilizzando come seconda variabile lagrangiana l'angolo θ in figura, determinare:
1) Le configurazioni di equilibrio del sistema (facoltativo: studiarne la stabilità).
2) Le reazioni vincolari in E in una configurazione di equilibrio.
3a) L'energia cinetica totale del sistema.
3b) La matrice principale centrale d'inerzia del sistema costituito dalla lamina ed i punti in A e C.
Momento d'inerzia di una lamina quadrata di massa M e lato ℓ rispetto a qualunque asse del piano passante per il baricentro: $\frac{1}{12}M\ell^2$.



Soluzione.
Dati principali.
Lamina: lato $\sqrt{2}L$, massa m. Punto A: massa m. Punto C: massa $2m$. Costante elastica $k = 4\frac{mg}{L}$.
Forza costante con componente orizzontale $F = 2mg$.
Serve calcolare la lunghezza della diagonale della lamina, pari a $\sqrt{2}$ volte il lato, quindi $|C - A| = \sqrt{2}\sqrt{2}L = 2L$, $|E - A| = |C - E| = L$.
Coordinate dei punti rilevanti, in base alle coordinate lagrangiane date nel testo (notiamo che $(A-E)$ è un vettore opposto a $(C - E)$, cioè $(A - E) = -(C - E)$).

$$(E - O) = s\,\mathbf{i} - s\,\mathbf{j}; \quad (C - E) = L\,\cos\theta\,\mathbf{i} + L\,\sin\theta\,\mathbf{j}; \quad (A - E) = -L\,\cos\theta\,\mathbf{i} - L\,\sin\theta\,\mathbf{j};$$
$$(C - O) = (C - E) + (E - O) = (s + L\,\cos\theta)\,\mathbf{i} - (s - L\,\sin\theta)\,\mathbf{j}; \quad (\overline{C} - O) = (s + L\,\cos\theta)\,\mathbf{i};$$
$$(A - O) = (A - E) + (E - O) = (s - L\,\cos\theta)\,\mathbf{i} - (s + L\,\sin\theta)\,\mathbf{j};$$

Punto 1). Tutte le forze sono conservative, compresa la forza costante $\mathbf{F}$. Calcoliamo i potenziali della forza peso, con indici: e=lamina, a=punto A, c=punto C,

$$U_e = (-mg\,\mathbf{j}) \cdot (E - O) = -mg(E - O)_y = mgs$$
$$U_a = -mg(A - O)_y = mg(s + L\sin\theta)$$
$$U_c = -2mg(C - O)_y = 2mg(s - L\sin\theta).$$

Potenziale della forza costante agente su E

$$U_F = (E - O) \cdot \mathbf{F} = (E - O) \cdot (2mg\,\mathbf{i}) = 2mg(E - O)_x = 2mgs$$

Potenziale della forza elastica agente su C, con $k = 4mg/L$,

$$U_{el} = -\frac{1}{2}k\,(C - \overline{C})^2 = -\frac{1}{2}k(-s + L\sin\theta)^2 = -2\frac{mg}{L}(-s + L\sin\theta)^2.$$

Quindi il potenziale totale è dato da

$$U = 6mgs - mgL\sin\theta - 2\frac{mg}{L}(-s + L\sin\theta)^2,$$

Annullando le derivate del potenziale rispetto alle due variabili lagrangiane otteniamo

$$\begin{aligned}\partial_s U &= 6mg + 4\tfrac{mg}{L}(-s + L\sin\theta) = 0,\\ \partial_\theta U &= -mgL\cos\theta - 4mg(-s + L\sin\theta)\cos\theta = 0.\end{aligned}$$

Eliminando il fattore costante mg e moltiplicando la prima equazione per L troviamo

$$\begin{cases} 6L + 4(-s + L\sin\theta) = 0,\\ L\cos\theta + 4(-s + L\sin\theta)\cos\theta = 0.\end{cases}$$

Notiamo che dalla prima equazione si ricava $4(-s + L\sin\theta) = -6L$ che possiamo sostituire nella seconda equazione, ottenendo $-5L\cos\theta = 0$ e quindi $\theta = \pm\pi/2$. Sostituendo i valori di θ nella prima equazione ricaviamo allora

$$6L + 4(-s \pm L) = 0, \qquad 4s = 6L \pm 4L, \qquad s = \frac{3}{2}L \pm L$$

Le due configurazoni di equilibrio $(s_1, \theta_1), (s_2, \theta_2)$ sono

$$\Big(\frac{1}{2}L, -\frac{\pi}{2}\Big), \qquad \Big(\frac{5}{2}L, \frac{\pi}{2}\Big).$$

Per studiare la stabilità degli equilibri valutiamo la matrice hessiana di U, calcolando le derivate seconde di U (attenzione ad utilizzare le effettive derivate di U non trascurando eventuali fattori),

$$\partial_{ss}U = -4\frac{mg}{L}, \quad \partial_{s\theta}U = 4mg\cos\theta, \quad \partial_{\theta\theta}U = mgL\sin\theta - 4mgL(\cos\theta)^2 + 4mg(-s + L\sin\theta)\sin\theta.$$

Dopo avere anche verificato, come controllo di correttezza, che $\partial_{s\theta}U = \partial_{\theta s}U$, ricaviamo la matrice hessiana nelle due configurazioni di equilibrio, diagonale in entrambi i casi,

$$H(s_1, \theta_1) = \begin{bmatrix} -4\frac{mg}{L} & 0\\ 0 & 5mgL\end{bmatrix}, \qquad H(s_2, \theta_2) = \begin{bmatrix} -4\frac{mg}{L} & 0\\ 0 & -5mgL\end{bmatrix}.$$

Gli autovalori in questo caso (matrice diagonale) non sono altro che gli elementi diagonali, e quindi concludiamo che U in (s_1, θ_1) ha un punto di sella e la corrispondente configurazione è instabile, mentre in (s_2, θ_2) ha un massimo (autovalori entrambi negativi) e la configurazione è stabile.

Punto 2). Abbiamo un unico vincolo esterno, dato dal carrello in E che scorre lungo una guida obliqua, inclinata di $\pi/4$ rispetto all'orizzontale. Sappiamo che la reazione vincolare $\mathbf{\Phi}_E$ sarà ortogonale alla guida, e quindi ci aspettiamo che abbia componenti cartesiane Φ_{Ex}, Φ_{Ey} uguali. Procediamo applicando la prima equazione cardinale della statica al sistema

$$\mathbf{\Phi}_E + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{el} + \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

dove $\mathbf{F}_e, \mathbf{F}_a, \mathbf{F}_c$ sono le forze peso. Esplicitamente abbiamo

$$\Phi_{Ex}\,\mathbf{i} + \Phi_{Ey}\,\mathbf{j} - mg\,\mathbf{j} - mg\,\mathbf{j} - 2mg\,\mathbf{j} - k(-s + L\sin\theta) + 2mg\,\mathbf{i} = \mathbf{0},$$

da cui otteniamo le due equazioni scalari

$$\Phi_{Ex} + 2mg = 0, \qquad \Phi_{Ey} - 4mg + 4\tfrac{mg}{L}s - 4mg\sin\theta = 0,$$

quindi chiaramente è sempre $\Phi_{Ex} = -2mg$, e sostituendo i valori di s e θ otteniamo che anche $\Phi_{Ey} = -2mg$ nelle due configurazioni (come previsto, dovendo essere $\Phi_{Ex} = \Phi_{Ey}$). La reazione vincolare è pari quindi a $\mathbf{\Phi}_E = -2mg\,\mathbf{i} - 2mg\,\mathbf{j}$ in entrambe le configurazioni.

Punto 3a). Possiamo calcolare separatamente l'energia cinetica delle tre parti del sistema (la lamina e i punti A, C). L'energia cinetica di un punto di massa M e velocità V è data comunque da $\frac{1}{2}MV^2$, quindi ricaviamo le velocità derivando le rispettive coordinate rispetto al tempo

$$\dot{C} = (\dot{s} - L\sin\theta\,\dot{\theta}, -\dot{s} + L\cos\theta\,\dot{\theta}), \quad \dot{C}^2 = 2\dot{s}^2 + L^2\,\dot{\theta}^2 - 2L(\sin\theta + \cos\theta)\,\dot{s}\dot{\theta},$$

$$\dot{A} = (\dot{s} + L\sin\theta\,\dot{\theta}, -\dot{s} - L\cos\theta\,\dot{\theta}), \quad \dot{A}^2 = 2\dot{s}^2 + L^2\,\dot{\theta}^2 + 2L(\sin\theta + \cos\theta)\,\dot{s}\dot{\theta}.$$

Quindi (C di massa $2m$, A di massa m)

$$T_C = m(2\dot{s}^2 + L^2\,\dot{\theta}^2 - 2L(\sin\theta + \cos\theta)\,\dot{s}\dot{\theta}), \quad T_A = \frac{1}{2}m(2\dot{s}^2 + L^2\,\dot{\theta}^2 + 2L(\sin\theta + \cos\theta)\,\dot{s}\dot{\theta}).$$

La lamina ruota e trasla nel piano, e non ha comunque un moto di pura rotazione attorno a un punto fisso, calcoliamo quindi l'energia cinetica col teorema di Koenig

$$T_E = \frac{1}{2}m\dot{E}^2 + \frac{1}{2}I_E\dot{\theta}^2,$$

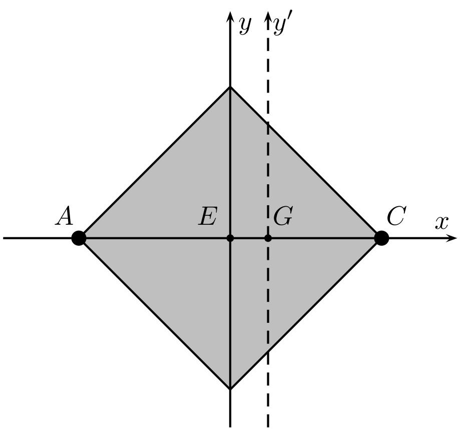
la velocità di E è data dal quadrato di $(\dot{s}, -\dot{s})$, quindi $2\dot{s}^2$, il momento di inerzia si può ricavare dal testo. Sappiamo che rispetto a qualunque *asse del piano xy* passante per E il momento d'inerzia vale $\frac{1}{12}m(\sqrt{2}L)^2$, quindi $\frac{1}{6}mL^2$, ma una rotazione *nel piano* è una rotazione con asse ortogonale al piano, e il momento d'inerzia I_E rispetto a un tale asse passante per E è il doppio del precedente valore, $I_E = \frac{1}{3}mL^2$. Abbiamo allora

$$T_E = m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\big(\frac{1}{3}mL^2\big)\dot{\theta}^2 = m\dot{s}^2 + \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2.$$

L'energia cinetica totale risulta

$$T = 4m\dot{s}^2 + \frac{5}{3}mL^2\dot{\theta}^2 - mL(\sin\theta + \cos\theta)\dot{s}\dot{\theta}.$$

Punto 3b). Per il calcolo della matrice principale e centrale d'inerzia scegliamo intanto un riferimento di assi principali (se possibile), in questo caso la diagonale del quadrato contenente A e C è chiaramente un asse di simmetria del sistema, quindi scegliamo l'asse x lungo tale asse. L'asse z ortogonale al piano è pure principale d'inerzia, e qualunque asse del piano ortogonale a x è quindi anche principale. Scegliamo per comodità di calcolo l'origine nel centro del quadrato.
Sappiamo che il momento d'inerzia della lamina rispetto a qualunque asse del piano passante per E è pari a $\frac{1}{12}m(\sqrt{2}L)^2 = \frac{1}{6}mL^2$, quindi $I_{e,x} = I_{e,y} = \frac{1}{6}mL^2$.



I due punti hanno momento d'inerzia rispetto all'asse x uguale a zero, e $I_{a,y} = mL^2$, $I_{c,y} = 2mL^2$ (la massa di C è $2m$). La matrice (principale) d'inerzia rispetto all'origine E è quindi data dalla somma dei tre contributi, ricordando anche che per un sistema piano $I_z = I_x + I_y$,

$$\mathbf{I}^E = mL^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}.$$

Il baricentro del sistema G si troverà sull'asse x, con ascissa

$$x_G = \frac{m\,(-L) + m\,0 + 2m\,L}{4m} = \frac{L}{4}.$$

Il riferimento principale e centrale d'inerzia ha quindi origine in $G = (\frac{L}{4}, 0)$ e assi x', y', z' paralleli ai precedenti. In particolare la retta x' coincide con x, e y' dista $\frac{L}{4}$ da y (lo stesso vale per z'). Abbiamo quindi $I_x^E = I_{x'}^G$, e applicando il teorema di Huygens-Steiner all'intero sistema $I_y^E = I_{y'}^G + Md^2$, dove M è la massa totale e d la distanza tra y e y', quindi $I_{y'}^G = I_y^E - 4m(\frac{L}{4})^2 = (\frac{19}{6} - \frac{1}{4})mL^2 = \frac{35}{12}mL^2$, e $I_{z'}^G$ dato da $I_{z'}^G = I_{x'}^G + I_{y'}^G$ (o ricavato applicando H-S a I_z^E)

$$\mathbf{I}^G = mL^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{35}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{37}{12} \end{bmatrix}.$$