Data la funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$$

- (a) Determinare il dominio.
 (b) Studiare i limiti agli estremi del dominio, ricercando asintoti orizzontali e verticali.

(a) Osserviamo che il denominatore deve essere diverso da zero e quindi $x \neq \pm 1$.

L'argomento del logaritmo deve essere positivo, quindi imponiamo $x/(1-x^2) > 0$ studiando il segno di numeratore (N) e denominatore (D). Il numeratore è positivo per $x > 0$, il denominatore per $x^2 < 1$ e quindi per $-1 < x < 1$. Riportando segno di numeratore e denominatore in una tabellina vediamo che la frazione complessivamente sarà positiva, per la regola dei segni, per $x < -1$ e $0 < x < 1$, cioè per $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ dove i valori ± 1 risultano già esclusi. Quindi il dominio è l'insieme

	-1	0	1	
N > 0				
D > 0				
	+	-	+	-

$$D = (-\infty, -1) \cup (0, 1).$$

(b) Abbiamo quattro punti di frontiera del dominio: $-\infty, -1, 0, 1$, calcoliamo prima il $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x/(1-x^2))$. Notiamo che l'argomento del logaritmo è un rapporto di polinomi, in cui il denominatore ha grado maggiore del numeratore, e quindi tende a zero per $x \rightarrow -\infty$. Quando l'argomento tende a zero, il logaritmo (in una base > 1 , quale è la base e dei logaritmi naturali) tende a $-\infty$. Abbiamo allora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x}{1-x^2} = \ln(0) = -\infty,$$

dove i segni di uguaglianza vanno intesi nel senso dei limiti. La funzione quindi non ha un asintoto orizzontale. Non è richiesta la ricerca di eventuali asintoti obliqui, quindi passiamo al successivo limite, in cui ci avviciniamo a -1 da "sinistra".

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln \frac{x}{1-x^2} = \ln \frac{-1}{0^-} = \ln(+\infty) = +\infty.$$

Infatti la funzione logaritmo (in una base > 1) tende a $+\infty$ quando il suo argomento tende a $+\infty$. La funzione ha quindi un asintoto verticale per $x = -1$. Valutiamo ora il limite per $x \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{x}{1-x^2} = \ln \frac{0}{1} = \ln 0 = -\infty.$$

Anche in $x = 0$ troviamo un asintoto verticale. Si ha poi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{x}{1-x^2} = \ln \frac{1}{0^+} = \ln(+\infty) = +\infty.$$

E anche in $x = 1$ abbiamo un asintoto verticale.

Nota: l'eventuale ricerca dell'asintoto obliquo, per $x \rightarrow -\infty$, avrebbe richiesto il calcolo del limite che fornisce il coefficiente angolare m dell'asintoto, cioè

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \frac{x}{1-x^2}}{x} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

che risulta, da un calcolo diretto, una forma indeterminata. Possiamo provare ad utilizzare il teorema di De l'Hopital, calcolando il limite del rapporto tra la derivata del numeratore e quella del denominatore (ricordando che $(\ln(g(x)))' = \frac{1}{g(x)}g'(x)$).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \frac{x}{1-x^2}}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^2}{x} \frac{1-x^2-x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x^2}{x(1-x^2)} = 0$$

infatti si tratta di un rapporto di polinomi in cui il numeratore è di grado maggiore del denominatore. Abbiamo quindi $m = 0$ ma bisogna anche cercare il valore del termine noto (o dell'intercetta) q della retta asintotica dato da

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln \frac{x}{1-x^2} - mx \right),$$

ma essendo $m = 0$ questo non è altro che il limite già calcolato, di valore $-\infty$. Si avrebbe quindi $q = -\infty$ e ciò indica che l'asintoto obliquo non esiste (il risultato $m = 0$ permetteva di arrivare subito a questa conclusione).

Data la funzione

$$f(x) = (x^2 - 5x + 5)e^{x-1}.$$

- (a) Determinarne il dominio e derivata prima.
- (b) Studiare la crescenza e decrescenza e i punti di estremo relativo.
- (c) Determinare i massimi e minimi assoluti nell'intervallo $[1, 4]$.

(a) La funzione è il prodotto di un polinomio e di una funzione esponenziale. Ogni polinomio è definito (ed è anche continuo e derivabile) per $\forall x \in \mathbb{R}$. L'esponente della funzione esponenziale è un semplice polinomio di primo grado e quindi l'esponenziale è pure definito (continuo e derivabile) per $\forall x \in \mathbb{R}$. Complessivamente l'intera funzione ha quindi dominio $D = \mathbb{R}$.

La sua derivata, secondo le regole di derivazione di un prodotto (e della funzione composta e^{x-1}), è data da

$$f'(x) = (2x - 5)e^{x-1} + (x^2 - 5x + 5)e^{x-1}(1) = (x^2 - 3x)e^{x-1}.$$

(b) Studiamo il segno e l'annullamento di $f'(x)$.

	0	3	
$e^{x-1} > 0$			
$(x^2 - 3x) > 0$			
(andamento)	/	\	/

Il fattore e^{x-1} è sempre positivo. Il fattore $(x^2 - 3x) = x(x - 3)$ è un polinomio di secondo grado con radici 0 e 3, e sarà positivo per valori esterni all'intervallo delle radici (essendo anche positivo il coefficiente del termine x^2), cioè per $x < 0$ e $x > 3$. Riportiamo per chiarezza la situazione in una tabellina. La funzione è quindi strettamente crescente per $x < 0$ e $x > 3$, strettamente decrescente per $0 < x < 3$, inoltre

ha un massimo (relativo) per $x = 0$ e un minimo (relativo) per $x = 3$. Vediamo che nei due estremi trovati la funzione vale rispettivamente $f(0) = 5e^{-1} = 5/e$, $f(3) = (9 - 15 + 5)e^2 = -e^2$.

(c) I punti di massimo e minimo assoluto di una funzione continua in un intervallo chiuso vanno cercati tra: i punti di estremo relativo appartenenti all'intervallo; gli estremi dell'intervallo; eventuali punti di non derivabilità. I punti di estremo relativo sono stati già determinati, e solo il punto di minimo ottenuto per $x = 3$ ricade nell'intervallo indicato $[1, 4]$. La funzione ai due estremi 1 e 4 vale $f(1) = (1 - 5 + 5)e^0 = 1$ e $f(4) = (16 - 20 + 5)e^3 = e^3$. Non ci sono punti di non derivabilità. Confrontiamo quindi i valori di $f(1), f(3), f(4)$ e cioè $1, -e^2, e^3$. Tra questi $-e^2$ è sicuramente il minore essendo negativo, e e^3 è il maggiore, essendo chiaramente $e^3 > 1$. La funzione ha quindi, nell'intervallo $[1, 4]$, un unico massimo assoluto in $x = 4$ di valore e^3 , e un unico minimo assoluto in $x = 3$ di valore $-e^2$.

Determinare, attraverso il teorema di De l'hospital, il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{1 - \cos x}.$$

Dato che $\lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) = \tan(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$, il limite produce la forma indeterminata $0/0$, e possiamo applicare il teorema di De l'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{1 - \cos x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\sin x} = \frac{\frac{1}{1}}{0} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Notiamo che il segno dell'infinito non è determinato in quanto il segno del denominatore $\sin x$ per $x \rightarrow 0$ può essere sia positivo che negativo, e il limite quindi non esiste. Considerando che $\sin x > 0$ per $x \rightarrow 0^+$ e $\sin x < 0$ per $x \rightarrow 0^-$ comunque possiamo dire che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{1 - \cos x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan x}{1 - \cos x} = -\infty.$$

Nota 1: poteva essere più comodo ricordare l'altra espressione della derivata di $\tan x$, cioè $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$.

Nota 2: questa è un'applicazione immediata del teorema di De l'Hopital, in quanto il limite si trova in una delle due forme indeterminate $0/0$ o ∞/∞ . Nel caso di un limite della forma $0 \cdot \infty$ sarebbe stato necessario trasformarlo in una delle due forme precedenti.