

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale.

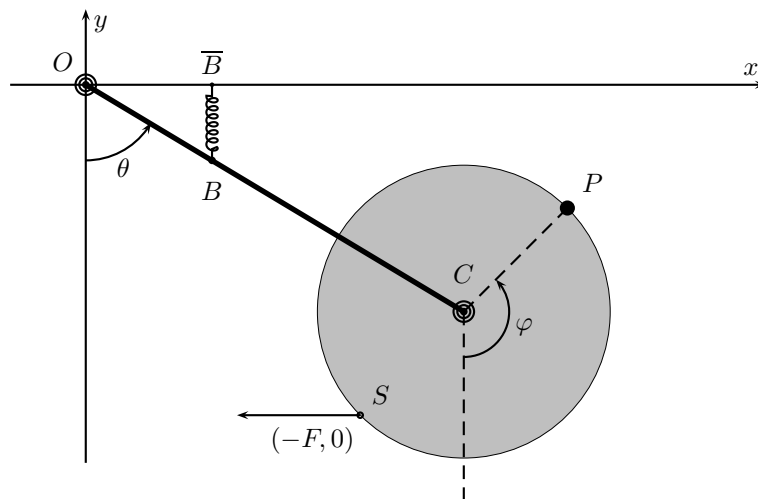
Esercizio B del compito di Fisica Matematica del 29 Novembre 2013.

Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da un'asta OC omogenea di lunghezza $3R$ e massa $2m$ incerniera in O e un disco omogeneo di raggio R e massa $4m$ avente il centro incernierato all'estremo C dell'asta. Inoltre sul bordo del disco è fissato rigidamente un corpo puntiforme P di massa m . Le cerniere si intendono lisce.

Oltre alla forza peso, sul sistema agiscono: una forza elastica $-k(B - \bar{B})$, dove B è il punto dell'asta con $|OB| = R$, e $\bar{B}$ è la proiezione di B sull'asse orizzontale passante per O ; una forza orizzontale costante $(-F, 0)$ applicata al punto S diametralmente opposto a P .

Assunti il sistema di riferimento e le variabili lagrangiane θ e φ indicate in figura, e posto $k = \lambda \frac{mg}{R}$, $F = \mu mg$ con $\lambda, \mu > 0$, determinare:

- 1) Per quali valori di λ e μ esiste una configurazione di equilibrio con $\theta = \varphi = \pi/3$.
 - 2) Le reazioni vincolari in O e le reazioni interne in C in tale configurazione.
 - 3a) L'energia cinetica totale del sistema (facoltativo: le equazioni di Lagrange del sistema).
 - 3b) La matrice principale centrale d'inerzia del sistema costituito dal disco e la massa in P .
- Gli studenti di Ing. Ind. svolgano il punto 3a, gli studenti di Ing. Mecc. il punto 3b.



Svolgimento.

Asta OC : $3R, 2m$. Disco: $R, 4m$. Punto: m .

Coordinate dei punti rilevanti, in base alle coordinate lagrangiane date nel testo (notiamo che $(S - C)$ è un vettore opposto a $(P - C)$, cioè $(S - C) = -(P - C)$). G indica il punto medio, e quindi baricentro, dell'asta omogenea OC .

$$\begin{aligned}
 (B - O) &= R \sin \theta \mathbf{i} - R \cos \theta \mathbf{j}; & (\bar{B} - O) &= R \sin \theta \mathbf{i}; \\
 (G - O) &= \frac{3}{2}R \sin \theta \mathbf{i} - \frac{3}{2}R \cos \theta \mathbf{j}; & (C - O) &= 3R \sin \theta \mathbf{i} - 3R \cos \theta \mathbf{j}; \\
 (P - C) &= R \sin \varphi \mathbf{i} - R \cos \varphi \mathbf{j}; \\
 (P - O) &= (C - O) + (P - C) = (3R \sin \theta + R \sin \varphi) \mathbf{i} - (3R \cos \theta + R \cos \varphi) \mathbf{j}; \\
 (S - O) &= (C - O) + (S - C) = (3R \sin \theta - R \sin \varphi) \mathbf{i} - (3R \cos \theta - R \cos \varphi) \mathbf{j};
 \end{aligned}$$

Punto 1). Tutte le forze sono conservative, compresa la forza costante $\mathbf{F}$. Calcoliamo i potenziali della forza peso, con indici: a=asta, d=disco, p=punto,

$$\begin{aligned}
 U_a &= (G - O) \cdot (-2mg \mathbf{j}) = -2mg(G - O)_y = 3mgR \cos \theta \\
 U_d &= -4mg(C - O)_y = 12mgR \cos \theta \\
 U_p &= -mg(P - O)_y = mgR(3 \cos \theta + \cos \varphi).
 \end{aligned}$$

Potenziale della forza costante agente su S

$$U_F = (S - O) \cdot \mathbf{F} = (S - O) \cdot (-\mu mg \mathbf{i}) = -\mu mg(S - O)_x = -\mu mgR(3 \sin \theta - \sin \varphi)$$

Potenziale della forza elastica agente su B , con $k = \lambda mg/R$,

$$U_{el} = -\frac{1}{2}k(B - \bar{B})^2 = -\frac{1}{2}kR^2(-\cos \theta)^2 = -\frac{1}{2}\lambda mgR(\cos \theta)^2.$$

Quindi il potenziale totale è dato da

$$U = 18mgR \cos \theta + mgR \cos \varphi - 3\mu mgR \sin \theta + \mu mgR \sin \varphi - \frac{1}{2}\lambda mgR(\cos \theta)^2.$$

Le configurazioni di equilibrio saranno date dall'annullamento delle derivate del potenziale rispetto alle variabili θ e φ , ovvero

$$\begin{cases} \partial_\theta U = -18mgR \sin \theta - 3\mu mgR \cos \theta + \lambda mgR \sin \theta \cos \theta = 0, \\ \partial_\varphi U = -mgR \sin \varphi + \mu mgR \cos \varphi = 0. \end{cases}$$

Trascurando il fattore costante mgR , abbiamo quindi

$$\begin{cases} 18 \sin \theta + 3\mu \cos \theta - \lambda \sin \theta \cos \theta = 0, \\ \sin \varphi = \mu \cos \varphi. \end{cases}$$

in cui le costanti λ e μ secondo le richieste del testo, devono essere tali che $\theta = \varphi = \pi/3$ sia una soluzione. Sostituendo quindi tali valori di θ e φ otteniamo

$$\begin{cases} 18 \frac{\sqrt{3}}{2} + 3\mu \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \mu \frac{1}{2}, \end{cases}$$

da cui ricaviamo $\mu = \sqrt{3}$ e quindi

$$18 \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda = 0, \quad \lambda = 42.$$

Punto 2). Valutiamo la reazione vincolare nella cerniera O , indicando con Φ_O tale reazione. La condizione di staticità per l'intero sistema (prima equazione cardinale della statica) nella configurazione indicata è

$$\Phi_O + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_{el} + \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

dove le $\mathbf{F}$ con indici a, d, p sono le forze peso e $\mathbf{F}_{el}$ è la forza elastica, ovvero

$$\Phi_O - 2mg\mathbf{j} - 4mg\mathbf{j} - mg\mathbf{j} - 42 \frac{mg}{R}(B - \bar{B}) - \sqrt{3}mg\mathbf{i} = \Phi_O - 7mg\mathbf{j} + 21mg\mathbf{j} - \sqrt{3}mg\mathbf{i} = \mathbf{0},$$

ne segue

$$\Phi_O = \sqrt{3}mg\mathbf{i} - 14mg\mathbf{j}.$$

Notiamo che la componente x di Φ è uguale e opposta alla forza costante (unica forza orizzontale). Per calcolare la reazione vincolare in C , in particolare la reazione esercitata dall'asta sul disco, consideriamo la prima equazione cardinale della statica relativa al disco più il punto,

$$\Phi_C + \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_p + \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

e quindi

$$\Phi_C - 5mg\mathbf{j} - \sqrt{3}mg\mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad \Phi_C = \sqrt{3}mg\mathbf{i} + 5mg\mathbf{j}.$$

Punto 3a). Calcoliamo separatamente l'energia cinetica dell'asta, il disco e il punto P (sottintendiamo che i moti si svolgono nel piano verticale xy).

L'asta esegue un moto *puramente rotatorio* attorno al suo estremo O , quindi l'energia cinetica può essere calcolata come $T_a = \frac{1}{2} I_a^O \omega^2$, dove la velocità angolare ω sarà data da $\dot{\theta}$, e il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse passante per un suo estremo è noto, ed è pari a $I = \frac{1}{3} ML^2$, essendo M ed L massa e lunghezza dell'asta. Nel caso dell'asta OC sarà

$$I_a^O = \frac{1}{3} 2m(3R)^2 = 6mR^2; \quad T_a = 3mR^2 \dot{\theta}^2.$$

Il moto del disco **non** è puramente rotatorio, ed è necessario calcolare l'energia cinetica applicando il teorema di Koenig, ovvero scomporre l'energia cinetica in energia cinetica di una massa concentrata nel baricentro più l'energia cinetica del moto (rotatorio) attorno al baricentro, quindi

$$T_d = \frac{1}{2} 4m\dot{C}^2 + \frac{1}{2} I_d^C \dot{\varphi}^2.$$

Ricaviamo $\dot{C}$ derivando le coordinate di C rispetto al tempo

$$\dot{C} = 3R \cos \theta \dot{\theta} \mathbf{i} + 3R \sin \theta \dot{\theta} \mathbf{j}, \quad \dot{C}^2 = 9R^2 \dot{\theta}^2.$$

Il momento d'inerzia di un disco di massa M e raggio r relativo a un asse ortogonale al suo piano e passante per il baricentro è noto ed è pari a $\frac{1}{2}Mr^2$, e quindi

$$I_d^C = 2mR^2; \quad T_d = 18mR^2\dot{\theta}^2 + mR^2\dot{\varphi}^2.$$

L'energia cinetica del punto non è altro che $\frac{1}{2}mv^2$, dove la velocità del punto va calcolata derivandone le coordinate rispetto al tempo,

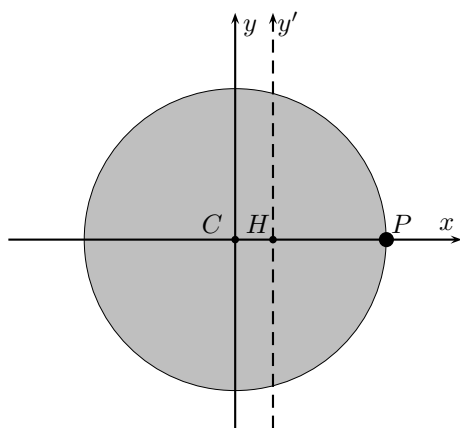
$$\dot{P} = (3R \cos \theta \dot{\theta} + R \cos \varphi \dot{\varphi}) \mathbf{i} + (3R \sin \theta \dot{\theta} + R \sin \varphi \dot{\varphi}) \mathbf{j},$$

$$T_p = \frac{1}{2}m(9R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + 6R^2 \cos(\theta - \varphi)\dot{\theta}\dot{\varphi}),$$

e sommando i tre termini ricaviamo l'energia cinetica dell'intero sistema. La lagrangiana del sistema è data da $T + U$, da cui possiamo ricavare le equazioni di Lagrange secondo la nota formula.

Punto 3b). Per il calcolo della matrice principale e centrale d'inerzia possiamo utilizzare un riferimento in cui un asse contiene il centro del disco e il punto P , che sarà chiaramente un asse di simmetria piana per il sistema e quindi asse principale d'inerzia.

Calcoliamo inizialmente le matrici d'inerzia del disco e del punto. Notiamo che per il disco gli assi x e y sono principali d'inerzia, e naturalmente lo sono anche per il punto. Per il disco abbiamo (momento d'inerzia di un disco omogeneo di massa M e raggio r rispetto a un asse *del piano* passante per il baricentro $I = \frac{1}{4}Mr^2$)



$$I_{dx} = I_{dy} = \frac{1}{4}4mR^2 = mR^2,$$

per il punto

$$I_{px} = 0, \quad I_{py} = mR^2,$$

complessivamente la matrice d'inerzia del sistema (principale ma non centrale) è data da

$$\mathbf{I}^C = mR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

dove abbiamo anche ricordato che per un sistema piano $I_z = I_x + I_y$. Il centro di massa H dell'intero sistema si trova, per simmetria, sull'asse x , con ascissa data da

$$x_H = \frac{0 \cdot 4m + R \cdot m}{4m + m} = \frac{R}{5}.$$

Consideriamo allora i nuovi assi x', y', z' paralleli ai precedenti, ma con origine in H . Il momento I_x non cambia nel passaggio alla nuova origine H perché $d = \text{dist}(x, x') = 0$, quindi $I_x^H = I_x^C$. Riguardo al momento I_y , per il teorema di Huygens-Steiner *applicato all'intero sistema*, e ricordando che H è il baricentro del sistema, si avrà $I_y^C = I_y^H + Md^2$, con $M = 5m$ massa totale e $d = \text{dist}(y, y') = (H - C)_x = R/5$, quindi

$$I_y^H = 2mR^2 - \frac{1}{5}mR^2 = \frac{9}{5}mR^2, \quad I_z^H = I_x^H + I_y^H = \left(1 + \frac{9}{5}\right)mR^2 = \frac{14}{5}mR^2$$

e la matrice principale e centrale d'inerzia risulta allora

$$\mathbf{I}^H = mR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{5} \end{bmatrix}.$$