

Esercizi di studio della derivata prima.

Problemi di ricerca di massimi e minimi, che portano allo studio della derivata di una funzione "obiettivo".

1 FUNZIONI

Studiare la derivata prima delle seguenti funzioni, trovando gli intervalli di crescita e decrescenza e i punti di estremo relativo (e anche eventuali punti stazionari non di estremo).

1) $f(x) = x^3 + 1$

2) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

3) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

4) $f(x) = -x^3 + 2x + 1$

5) $f(x) = x e^{-x}$

6) $f(x) = x \ln(x)$

7) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

8) $f(x) = e^{-x^2}$

9) $f(x) = -x^3 - 3x^2 + x - 5$

10) $f(x) = 2x^5 - x^4 - x^3 + 1$

2 PROBLEMI ALGEBRICI

1. La somma di due numeri è 40 e vogliamo che sia minima la somma dei loro quadrati.
2. La somma di due numeri è 60 e vogliamo che sia minima la somma del doppio del quadrato del primo con il quadruplo del quadrato del secondo.
3. Due numeri non negativi hanno come prodotto 25. Quanto vale il minimo della loro somma?
4. Dati n numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$, trovare x che rende minimo il valore di

$$(a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \dots + (a_n - x)^2.$$

Provare anche con caso specifico, ad esempio i numeri $\{1, 2, 3, 10\}$.

5. Dimostrare che $x + \frac{1}{x} \geq 2$ per qualsiasi $x > 0$.

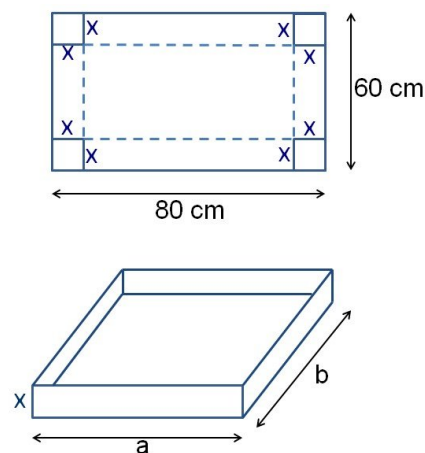
3 PROBLEMI DI GEOMETRIA ANALITICA

1. Trovare il punto appartenente alla retta di equazione $2x - y + 3 = 0$ con distanza minima dall'origine.
2. Trovare il punto appartenente alla retta $y = -2x + 2$ con distanza minima dal punto $P(0, 1)$.
3. Quali punti della parabola $y = x^2 - 1$ hanno distanza minima dall'origine degli assi?
4. Quali punti della parabola $y = x^2$ hanno distanza minima da un generico punto dell'asse y , di coordinate $(0, a)$? Discutere al variare di a .

- Consideriamo dei triangoli rettangoli aventi un cateto sull'asse x , l'altro sull'asse y e l'ipotenusa passante per il punto $P(2, 1)$. Quale tra questi triangoli ha area minima?
- Tra tutte le rette tangenti al grafico della funzione $y = \frac{6}{x^2 + 3}$, trovare quelle con coefficiente angolare massimo e minimo (si dovrà ripetere due volte il calcolo della derivata...).

4 PROBLEMI GEOMETRICI

- Verificare che tra tutti i rettangoli di area assegnata, il quadrato è quello di perimetro minimo.
- Dato un rettangolo di cartone di 80 cm x 60 cm vogliamo ricavare una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo di altezza x ritagliandone 4 quadrati di lato x e ripiegando lungo le righe tratteggiate (**in figura** sono rappresentati il rettangolo e la scatola risultante). Quanto deve valere x per ottenere il volume massimo?
- Una lattina di alluminio ha una forma di cilindro circolare con le basi piatte. Vogliamo trovare la lattina che richiede la minor quantità di alluminio (quindi minima superficie totale) per un volume fissato di 330cm^3 .
- Avendo a disposizione 120 m di rete si vuole recintare un campo rettangolare, che andrà pure diviso internamente in due campi rettangolari usando la stessa rete. Qual è la superficie massima recintabile?



5 PROBLEMI VARI

- Ad un paziente viene somministrato un farmaco. La funzione

$$f(t) = \frac{8t}{t^2 + 4}$$

rappresenta la concentrazione del farmaco nel sangue in funzione del tempo t (tempo misurato in ore). Calcolare dopo quanto tempo si ha la massima concentrazione del farmaco nel sangue ed a quanto corrisponde tale concentrazione.

- All'istante $t = 0$ un'automobile A si trova 20 km ad Ovest di un'automobile B. L'auto A si muove verso Est alla velocità di 80 km/h, e l'auto B si muove verso Nord a 40 km/h. Dopo quanti minuti le due auto avranno distanza minima?