Università degli Studi di Catania

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale, A.A. 2023-2024
Compito di Fisica Matematica - 28 Marzo 2024

COMPITO E SVOLGIMENTO

Parte A

1. Trovare tutte le singolarità della funzione (non è richiesto di studiare il tipo di singolarità o eventuale ordine dei poli)

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\sin(\pi z^2)}$$

e valutare $\oint_C f(z)\,dz$ dove C è la curva di equazione $|z - \frac{1}{2}i| = 1$.

Le singolarità sono date dagli zeri del denominatore, cioè dalle soluzioni di $\sin(\pi z^2) = 0$. Quindi $\pi z^2 = k\pi$, con k intero relativo, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Semplificando otteniamo $z^2 = k$ e distinguiamo i valori $k \geq 0$ per i quali si ottiene $z_k = \pm\sqrt{k}$, e i valori $k < 0$ per i quali, ponendo $h = -k$, otteniamo $z_h = \pm i\sqrt{h}$. Abbiamo quindi i valori z_k sull'asse reale e z_h sull'asse immaginario (non è richiesto di analizzare il tipo di singolarità, ma notiamo che per $k = 0$ e per valori di k che siano quadrati perfetti, cioè $1, 4, 9, \ldots$ si annulla anche il numeratore).
Esaminiamo la curva C, si tratta di una circonferenza di centro $z_0 = \frac{i}{2}$ e raggio 1, si può verificare (graficamente, o calcolando la distanza delle radici dal centro z_0) che solo le radici 0, i, $i\sqrt{2}$ sono interne a C. In $z = 0$ abbiamo un polo del primo ordine, infatti

$$\lim_{z\to 0} \frac{z\sin(\pi z)}{\sin(\pi z^2)} = \lim_{z\to 0} \frac{\pi z^2}{\sin(\pi z^2)} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = 1$$

In $z = i$ abbiamo pure un polo del primo ordine

$$\lim_{z\to i} \frac{\sin(\pi z)}{2\pi z\cos(\pi z^2)} = \frac{\sin(i\pi)}{-2\pi i} = -\frac{\sinh(\pi)}{2\pi}$$

E anche in $z = i\sqrt{2}$ si ha un polo del primo ordine con residuo $\sinh(\sqrt{2}\pi)/(2\sqrt{2}\pi)$. L'integrale vale quindi

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(1 - \frac{\sinh(\pi)}{2\pi} + \frac{\sinh(\sqrt{2}\pi)}{2\sqrt{2}\pi}\right) = 2\pi i - i\sinh(\pi) + \frac{i}{\sqrt{2}}\sinh(\sqrt{2}\pi)$$

2. Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y \;=\; 4(t-1)\,H(t-1) \\ y(0) = 1,\; y'(0) = 1 \end{cases}$$

Abbiamo $\mathcal{L}[y''] = s^2 Y - s - 1$, con $Y = \mathcal{L}[y]$ e anche $\mathcal{L}[4(t-1)H(t-1)] = 4e^{-s}/s^2$, ricordando la seconda proprietà di traslazione. Quindi sostituendo ed esplicitando

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4} + e^{-s}\frac{4}{s^2(s^2+4)}.$$

I primi due termini si antitrasformano immediatamente, per il terzo è necessario uno sviluppo in fratti semplici del tipo

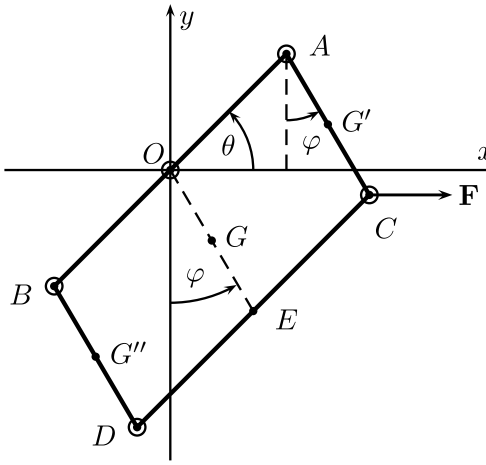
$$\frac{4}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4} \quad \to \quad 4 \equiv As^3 + 4As + Bs^2 + 4B + Cs^3 + Ds^2$$

che porta ai valori $A = 0, B = 1, C = 0, D = -1$, e quindi

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4} + e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right) \qquad \text{e antitrasformando}$$

$$y(t) = \cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t) + H(t-1)\big((t-1) - \frac{1}{2}\sin(2t-2)\big)$$

Parte B



Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da quattro aste omogenee, due di lunghezza $2L$ e massa $2m$, e due di lunghezza L e massa m, articolate tra di loro con cerniere lisce, in modo da formare un **parallelogramma** di vertici A, B, C, D come da figura (con $|AB| = |CD| = 2L$ e $|AC| = |BD| = L$). Il punto medio dell'asta AB è vincolato tramite una cerniera liscia a un punto O del piano. Oltre la forza peso, sul sistema agisce una forza orizzontale costante $\mathbf{F} = (3mg, 0)$ applicata al vertice C. Notare che per la simmetria del sistema il centro di massa delle quattro aste si troverà nel centro geometrico del parallelogramma, ovvero nel punto medio di OE, essendo E il punto medio dell'asta CD.
Assunti il sistema di riferimento in figura, e le variabili lagrangiane θ, φ, con θ angolo formato dal versore dell'asse orizzontale e il vettore OA, e φ angolo formato dall'opposto del versore dell'asse verticale e il vettore OE (per chiarezza è evidenziato anche un altro angolo di ampiezza uguale a φ):
1) Determinare le coordinate dei punti rilevanti del sistema in funzione delle variabili lagrangiane.
2) Calcolare il potenziale (o l'energia potenziale) totale.
3) Trovare tutte le configurazioni di equilibrio del sistema.
4) Studiare la stabilità delle configurazioni aventi $\theta = 0$.
5) Calcolare l'energia cinetica totale del sistema (notare che la rotazione delle aste AC e BD è legata all'angolo φ, mentre la rotazione delle aste AB e CD dipende da θ).

---

1) I punti rilevanti per il calcolo del potenziale sono: C in cui è applicata la forza $\mathbf{F}$; il baricentro del sistema delle quattro aste che si trova, come suggerito nel testo, nel punto medio di OE che possiamo chiamare G. In seguito, per il calcolo dell'energia cinetica, serviranno anche i punti medi delle aste AC e BD, che possiamo chiamare G' e G''.
Abbiamo $OA = -OB = L(\cos\theta, \sin\theta)$, $OE = AC = BD = L(\sin\varphi, -\cos\varphi)$, quindi

$$OC = OA + AC = L(\cos\theta + \sin\varphi, \sin\theta - \cos\varphi), \quad OG = \frac{L}{2}(\sin\varphi, -\cos\varphi)$$
$$OG' = OA + \frac{1}{2}AC = L(\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\varphi, \sin\theta - \frac{1}{2}\cos\varphi)$$
$$OG'' = OB + \frac{1}{2}BD = L(-\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\varphi, -\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\varphi).$$

2) La massa totale delle aste è $6m$, quindi il potenziale della forza peso risulta

$$U_g = -6mg\, y_G = 3mgL\cos\varphi,$$

il potenziale della forza costante applicata in C è dato da $OC \cdot \mathbf{F}$

$$U_F = L(\cos\theta + \sin\varphi, \sin\theta - \cos\varphi) \cdot (3mg, 0) = 3mgL(\cos\theta + \sin\varphi)$$

e il potenziale totale è

$$U = U_g + U_F = 3mgL(\cos\theta + \sin\varphi + \cos\varphi)$$

3) Il calcolo delle forze generalizzate $U_\theta = \partial U/\partial\theta$ e $U_\varphi = \partial U/\partial\varphi$, a meno del fattore fattore costante positivo $3mgL$, porta al semplice sistema

$$\begin{cases} -\sin\theta = 0 \\ \cos\varphi - \sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Le due equazioni sono indipendenti e hanno come soluzioni $\theta = 0, \pi$ e $\varphi = \pi/4, 5\pi/4$ (soluzioni di $\tan\varphi = 1$). Si hanno in totale quattro configurazioni di equilibrio date dalle possibili coppie di valori di θ e φ.

4) Le configurazioni con $\theta = 0$ sono $(\theta, \varphi) = (0, \pi/4), (0, 5\pi/4)$. La loro stabilità corrisponde alla presenza di un massimo nel potenziale U, che si studia attraverso la matrice Hessiana del potenziale stesso. Le derivate miste risultano nulle, quindi sulla diagonale principale troviamo subito gli autovalori dati da

$$U_{\theta\theta}(\theta) = -\cos\theta, \qquad U_{\varphi\varphi}(\varphi) = -\sin\varphi - \cos\varphi.$$

Si ha per entrambe le configurazioni $U_{\theta\theta}(0) = -1$, per l'altro autovalore rispettivamente $U_{\varphi\varphi}(\pi/4) = -\sqrt{2}$ e $U_{\varphi\varphi}(5\pi/4) = \sqrt{2}$. La prima configurazione è quindi stabile e la seconda è instabile.

5) L'energia cinetica del sistema è data dalla somma delle energie cinetiche T della quattro aste, che calcoliamo separatamente. Notiamo che l'asta AB esegue un moto di pura rotazione attorno all'origine O, per le altre tre aste sarà utile usare il teorema di Koenig. E' importante notare, come indicato nel testo, che la rotazione rispetto ai loro centri di massa delle aste AB e CD dipende dall'angolo θ, mentre la rotazione delle aste AC e BD dipende da φ. Calcoliamo intanto i momenti di inerzia delle aste rispetto ad assi passanti per i loro punti medi, e perpendicolari al piano di moto

$$I_{AB} = I_{CD} = \frac{1}{12}(2m)(2L)^2 = \frac{2}{3}mL^2, \quad I_{AC} = I_{BD} = \frac{1}{12}mL^2.$$

Quindi

$$T_{AB} = \frac{1}{2}\, I_{AB}\, \dot\theta^2 = \frac{1}{3}\, mL^2\, \dot\theta^2.$$

In base al teorema di Koenig, scomporremo l'energia cinetica delle altre aste in un termine di traslazione dei centri di massa e un termine di energia cinetica relativa al centro di massa che risulta di pura rotazione trattandosi di corpi rigidi. Calcoliamo le velocità dei centri di massa E, G', G'' derivando le rispettive coordinate

$$\begin{aligned} V_E &= \dot E = L(\cos\varphi\,\dot\varphi, \sin\varphi\,\dot\varphi) \\ V_{G'} &= \dot G' = L(-\sin\theta\,\dot\theta + \tfrac{1}{2}\cos\varphi\,\dot\varphi, \cos\theta\,\dot\theta + \tfrac{1}{2}\sin\varphi\,\dot\varphi) \\ V_{G''} &= \dot G'' = L(\sin\theta\,\dot\theta + \tfrac{1}{2}\cos\varphi\,\dot\varphi, -\cos\theta\,\dot\theta + \tfrac{1}{2}\sin\varphi\,\dot\varphi) \end{aligned}$$

Con

$$\begin{aligned} V_E^2 &= L^2\dot\varphi^2 \\ V_{G'}^2 &= L^2(\dot\theta^2 + \tfrac{1}{4}\dot\varphi^2 - \sin(\theta - \varphi)\dot\theta\dot\varphi) \\ V_{G''}^2 &= L^2(\dot\theta^2 + \tfrac{1}{4}\dot\varphi^2 + \sin(\theta - \varphi)\dot\theta\dot\varphi). \end{aligned}$$

Notiamo che $V_{G'}^2 + V_{G''}^2 = L^2(2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\dot\varphi^2)$. Ricaviamo, ricordando anche che $I_{AC} = I_{BD}$,

$$
\begin{aligned}
T_{CD} &= \frac{1}{2} m L^2 \dot\varphi^2 + \frac{1}{2} I_{CD} \dot\theta^2 = \frac{1}{2} m L^2 \dot\varphi^2 + \frac{1}{3} m L^2 \dot\theta^2 \\
T_{AC} + T_{BD} &= \frac{1}{2} m L^2 (2\dot\theta^2 + \tfrac{1}{2}\dot\varphi^2) + 2\frac{1}{2} I_{AC} \dot\varphi^2 = m L^2 \dot\theta^2 + \tfrac{1}{3} m L^2 \dot\varphi^2,
\end{aligned}
$$

complessivamente

$$T = \frac{5}{3}\, m L^2\, \dot\theta^2 + \frac{5}{6} m L^2 \dot\varphi^2.$$