Università degli Studi di Catania

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale, A.A. 2014-2015
Prova scritta di Fisica Matematica - 9 Marzo 2015

Soluzioni parte A

1. La funzione presenta una singolarità eliminabile in $z = 0$ e poli semplici in $z = \pm i$. Il solo punto $z = i$ è interno a γ e in tale punto il residuo è $\frac{i}{2}(3 - e - \frac{1}{e})$, si ha quindi $\oint_\gamma f(z)\,dz = \pi(e + \frac{1}{e} - 3)$.

2. L'integrando ha poli semplici nelle sei radici seste z_k di -1, con $z_k = \cos(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3})$, $k = 0, \ldots, 5$. La funzione integranda soddisfa il lemma del grande cerchio e si può applicare il teorema dei residui all'opportuno circuito, ricavando un valore dell'integrale di $\frac{4}{3}\pi$.

3. Si ottiene
$$Y(s) = \frac{-s^3 + 2s^2 + 3}{s^2(s-1)(s-9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s-9}$$
con $A = \frac{10}{27}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = -\frac{7}{4}$, $D = \frac{41}{108}$, e quindi antitrasformando
$$y(t) = \frac{10}{27} + \frac{1}{3}t - \frac{7}{4}e^t + \frac{41}{108}e^{9t}.$$

Soluzioni parte B

1. Le configurazioni di equilibrio sono date da (s, θ) pari a $(L/2, \frac{\pi}{6})$ (stabile), $(L/2, \frac{7}{6}\pi)$ (instabile).

2. La componente orizzontale della reazione vincolare in H (il vincolo è un carrello verticale, la reazione verticale risulta necessariamente nulla!) agli equilibri è sempre data da $-\sqrt{3}mg$ (compensa l'unica forza orizzontale, la $\mathbf{F}$ costante).

3. a) Immaginiamo il sistema composto da un telaio τ con quattro lati di uguale massa m e un'ulteriore asta CD di massa m. Il baricentro di τ coincide col suo centro geometrico G, il baricentro di CD è il punto E. Il momento d'inerzia del telaio τ rispetto al suo baricentro si ricava facilmente applicando la formula di Huygens-Steiner alla quattro aste che lo compongono e risulta pari a $I_\tau^G = \frac{16}{3}mL^2$, quindi applicando il Teorema di Koenig ai due sottosistemi ricaviamo
$$T_\tau = 2m(\dot{s}^2 + L^2\dot{\theta}^2 - 2L\sin\theta\dot{s}\dot{\theta}) + \frac{8}{3}mL^2\dot{\theta}^2, \quad T_{CD} = \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + 4L^2\dot{\theta}^2 - 4L\sin\theta\dot{s}\dot{\theta}) + \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2.$$
b)
$$\mathbf{I} = mL^2\begin{bmatrix} \frac{52}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{97}{15} \end{bmatrix}.$$