Università degli Studi di Catania

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale, A.A. 2014-2015
Prova scritta di Fisica Matematica - 20 Febbraio 2015

Soluzioni parte A

1. La funzione presenta poli semplici in $z = 0$, $z = \pm i$ e $z = k$ con k intero relativo, $k \neq \pm 1$, inoltre presenta poli doppi in $z = \pm 1$. La curva γ racchiude i poli $z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = i$ con residui rispettivamente

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = -\frac{1}{\pi}, \quad \mathrm{Res}(f, z_1) = -\frac{e}{8\pi}, \quad \mathrm{Res}(f, z_2) = \frac{1}{4e\sinh(\pi)}.$$

2. L'integrando ha poli semplici in $z = \pm i$ e poli doppi in $z = \pm 2i$. La funzione integranda soddisfa il lemma del grande cerchio e si può applicare il teorema dei residui all'opportuno circuito. Calcolando i residui in $z = i$ pari a $-i/18$ e in $z = 2i$ pari a $11i/288$ si ricava l'integrale pari a $5\pi/144$.

3. Si ottiene

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s^2+1)(s-1)^3} = \frac{s^4 - 2s^3 + 2s^2 - 2s + 2}{(s^2+1)(s-1)^3} = -\frac{1}{4}\frac{s-1}{s^2+1} + \frac{5}{4}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^3}$$

e quindi antitrasformando, si ricava

$$y(t) = -\frac{1}{4}\cos(t) + \frac{1}{4}\sin(t) + \frac{5}{4}e^t - \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}t^2e^t.$$

Soluzioni parte B

1. Le configurazioni di equilibrio sono date da (s, θ) pari a $(-L, \pm\frac{\pi}{3})$, $(-3L, \pi)$ (stabile), $(-L/3, 0)$.

2. La componente orizzontale della reazione vincolare in H (il vincolo è un carrello verticale, la reazione verticale risulta necessariamente nulla!) agli equilibri è pari rispettivamente a $\pm 2\sqrt{3}mg, 0, 0$.

3. a) Applicando il Teorema di Koenig ai rispettivi baricentri dell'asta (punto H) e della lamina (centro geometrico G della lamina) ricaviamo

$$T_{AB} = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2, \quad T_{ABCD} = 2m(\dot{s}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2L\sin(\theta)\dot{s}\dot{\theta}) + \frac{4}{3}mL^2\dot{\theta}^2.$$

b)

$$\mathbf{I} = mL^2 \begin{bmatrix} \frac{32}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{19}{5} \end{bmatrix}.$$