Università degli Studi di Catania

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale, A.A. 2013-2014
Prova scritta di Fisica Matematica - 9 Gennaio 2015

Prof. P. Falsaperla

Soluzioni parte A

1. La funzione presenta una singolarità eliminabile in $z = 0$, e poli semplici in $z = k\pi$, con k intero relativo (tranne $k = 0$). I poli che ricadono nella circonferenza γ (di centro $C = 2i$ e raggio 2π) sono solo i punti $z = \pm\pi$ in cui il residuo vale 1 (il residuo in effetti vale 1 in tutti i poli $k\pi$). L'integrale vale quindi $2\pi i(1 + 1) = 4\pi i$.
2. L'integrando ha poli semplici nelle sei radici seste complesse di -1, ovvero $e^{i(\pi/6+k\pi/3)}$ per $k = 0, \ldots, 5$. La funzione integranda soddisfa il lemma del grande cerchio e si può applicare il teorema dei residui ricavando che l'integrale è pari a $\frac{2}{3}\pi$.
3. Si ottiene $y(t) = \cos(t) + \frac{5}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}t\cos(t)$.

Soluzioni parte B

1. Le configurazioni di equilibrio sono date da (θ, φ) pari a $(0, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 0)$, (π, π), $(\pi/3, 0)$, $(\pi/3, \pi)$, $(-\pi/3, 0)$, $(-\pi/3, \pi)$. Sono stabili le configurazioni con $\varphi = 0$ e $\theta = \pm\pi/3$.
2. La reazione vincolare $\mathbf{\Phi}_O$ in O all'equilibrio è pari a $4mg\,\mathbf{j}, 0, 3mg\,\mathbf{j}$ rispettivamente per θ pari a $0, \pi, \pm\pi/3$, e non dipende da φ. La reazione interna esercitata sulla lamina in B vale sempre $mg\,\mathbf{j}$.
3. a) $T = \frac{2}{3}mL^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2) + mL^2\cos(\theta - \varphi)\dot\theta\dot\varphi$.
   b)
$$\mathbf{I} = mL^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}.$$