Corso di Laurea in Ingegneria Industriale.
Compito di Fisica matematica del 29/11/2013 (parte A, analisi).

1. Classificare le singolarità al finito delle seguenti funzioni e calcolarne i residui:

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2}, \qquad g(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} - \frac{1}{z}$$

2. Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 4t + 12e^{-t} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 6 \end{cases}$$

Soluzioni.

1. La $f(z)$ ha due poli doppi in $z = \pm i$, con

$$\mathrm{Res}(f(z), i) = -\frac{i}{2e}, \quad \mathrm{Res}(f(z), -i) = 0.$$

La $g(z)$ ha una singolarità eliminabile in $z = 0$, poli semplici in $z = k\pi \, (k \neq 0)$ con

$$\mathrm{Res}(g(z), k\pi) = 1.$$

2. Si ricava

$$Y(s) = 2\frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{s^2(s+1)(s-1)(s-2)} = \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{16}{s-1} + \frac{11}{s-2}$$

quindi

$$y(t) = 3 + 2t + 2e^{-t} - 16e^t + 11e^{2t}.$$