FISICA MATEMATICA	————————	L.T. in Ingegneria Industriale
FUORI CORSO, II SEMESTRE	A.A.2022–23	31 marzo 2023 (2h 30m)

AC. Usando il metodo dei residui, si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(4+x^2)^2} dx$$

Soluzione
La funzione integranda ha un polo doppio in $z = 2i$ con residuo pari a $-\frac{i}{8}$, l'integrale vale quindi $\frac{\pi}{4}$.

TL. Tramite le trasformate di Laplace, e ricordando che i polinomi biquatratici (del tipo ax^4+bx^2+c) si fattorizzano ponendo $w = x^2$, si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''''(t) + y''(t) - 2y(t) = 1 \\ y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione
Trasformando l'equazione si ricava

$$Y(s) = \frac{s^4 + s^2 + 1}{s(s^4 + s^2 - 2)}$$

Si ha $s^4 + s^2 - 2 = (s^2 - 1)(s^2 + 2)$, scomponendo in fratti semplici e antitrasformando si trova

$$y(t) = \frac{1}{2}(-1 + e^t + e^{-t} + \cos(\sqrt{2}\,x)).$$