

AC. Siano $R = 4$ e $r = 1/2$. Sia Γ il contorno costituito dalla circonferenza $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ percorsa in senso antiorario e dalla circonferenza $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ percorsa in senso orario.

1. Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z(z - 2)}.$$

Si determinino i poli e si calcoli il loro residuo.

2. Si disegni, nel piano di Gauss (dei numeri complessi) le due circonferenze ed i poli.

3. Si calcoli $\int_{\Gamma} f(z) dz$.

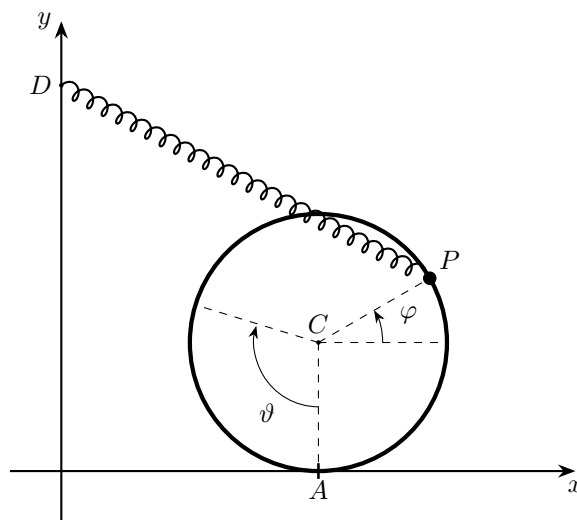
TL. Usando le trasformate di Laplace, si determini la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} y'(t) - y(t) = \int_0^t \sinh(t - \tau) y(\tau) d\tau + e^t, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

MR. (Cinematica) In un sistema di riferimento Oxy con y verticale ascendente giace un anello di massa m e raggio R (e quindi il momento d'inerzia baricentrico da usare è mR^2). Questo anello rotola senza strisciare sull'asse x . Il centro dell'anello è indicato con C , il punto di contatto tra l'anello e l'asse delle x con A . Lungo la circonferenza di questo anello scorre in modo liscio un punto materiale P di massa m .

(Dinamica) Al punto P è attaccata una molla di costante elastica $k = (2mg)/(3R)$ che lo collega ad un punto D posto sull'asse delle y nel punto di coordinate $(0, 3R)$. Il sistema è soggetto alla forza peso con accelerazione $-g\vec{j}$.

(Coordinate) Sia scelgano come coordinate lagrangiane ϑ l'angolo di rotazione **orario** dell'anello (quando OA ha coordinata positiva, allora ϑ è un angolo positivo, la scelta più naturale quando si ha una ruota che rotola) e φ l'angolo orientato tra il versore $\vec{i}$ ed il vettore CP . Si può usare al posto di ϑ la coordinata lagrangiana s , ascissa di A , ma questo non permette una semplificazione (quale è la relazione tra s e ϑ ?)



1. Si determinino le posizioni dei punti rilevanti.
2. Si calcoli l'energia potenziale del sistema.
3. Si determinino le 4 configurazioni di equilibrio del sistema.
4. Si calcoli l'energia cinetica associata ad un atto di moto del sistema.
5. Si calcoli la reazione vincolare in A nell'equilibrio con $\varphi = \pi/6$.

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
1	$\frac{1}{s}$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sqrt{t}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2s^3}}$	$t^{n-1/2}$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\frac{\pi}{s^{2n+1}}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$e^{bt} \sin(at)$	$\frac{a}{(s-b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \cos(at)$	$\frac{(s-b)}{(s-b)^2 + a^2}$
$t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cos(at)$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
$\sin(at + b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2 + a^2}$	$\cos(at + b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2 + a^2}$
$\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{s(s^2 - a^2)}{(s^2 + a^2)^2}$	$\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2 + a^2)^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$e^{bt} \sinh(at)$	$\frac{a}{(s-b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \cosh(at)$	$\frac{s-b}{(s-b)^2 - a^2}$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$H(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$\delta(t-a)$	e^{-as}
$f(t-a)H(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	$H(t-a)g(t)$	$e^{-as}\mathcal{L}(g(t+a))$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^{+\infty} F(\sigma) d\sigma$
$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$	$f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T f(t)e^{-st} dt}{1 - e^{-sT}}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Corpo	Disegno	Momento di inerzia	Corpo	Disegno	Momento di inerzia
Asta		$I_G^{\vec{j}} = mL^2/12$	Asta		$I_A^{\vec{j}} = mL^2/3$
Anello		$I_G^{\vec{k}} = mR^2$	Anello		$I_G^{\vec{j}} = mR^2/2$
Disco		$I_G^{\vec{k}} = mR^2/2$	Disco		$I_G^{\vec{j}} = mR^2/4$
Rettangolo		$I_G^{\vec{k}} = m(b^2 + h^2)/12$	Rettangolo		$I_G^{\vec{j}} = mb^2/12$

Svolgimento

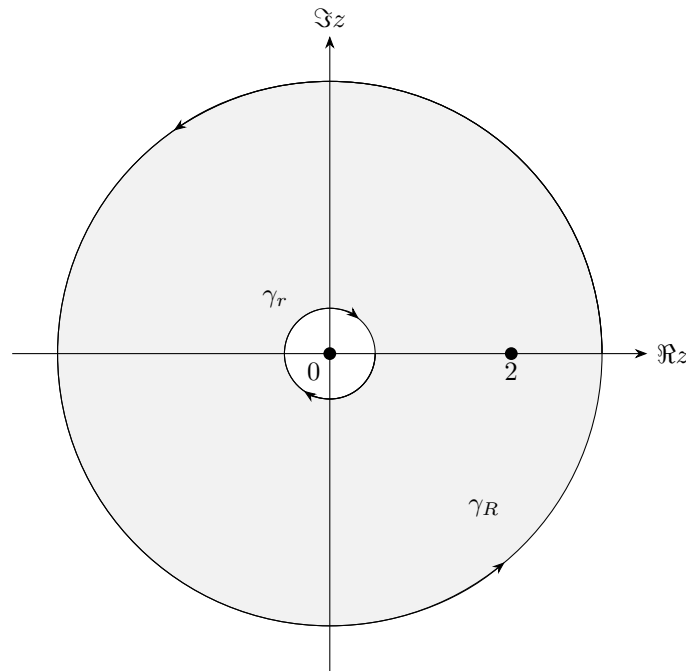
AC-1 Le singolarità della funzione sono i punti

$$z = 0, \quad z = 2,$$

entrambi poli semplici. I residui nei poli sono

$$\operatorname{res}(f, 0) = \left. \frac{z^2 + 1}{z - 2} \right|_{z=0} = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{res}(f, 2) = \left. \frac{z^2 + 1}{z} \right|_{z=2} = \frac{5}{2}.$$

AC-2 Il disegno è questo. Osservate che 0 è esterno alla corona circolare, mentre 2 è interno.



AC-3 Il contorno Γ è il bordo di una corona circolare, ed il risultato dell'integrale è $2\pi i$ per la somma dei residui dei poli interni a tale corona. Ovvero contribuiscono all'integrale solo i poli che si trovano all'interno di tale corona. Il polo 0 è esterno, mentre il polo 2 è interno. Quindi, per il teorema dei residui si ha

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \frac{5}{2} = 5\pi i$$

Si poteva anche affermare che l'integrale lungo il contorno esterno γ_R vale $2\pi i$ per la somma dei due residui, mentre l'integrale lungo il contorno interno γ_r vale $-2\pi i$ per il residuo in 0, che quindi viene cancellato dal primo integrale.

TL Il termine integrale è una convoluzione, infatti

$$\int_0^t \sinh(t - \tau) y(\tau) d\tau = (\sinh * y)(t).$$

Applicando la trasformata di Laplace e indicando con $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$, si ha

$$\mathcal{L}(y'(t)) - \mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}((\sinh * y)(t)) + \mathcal{L}(e^t).$$

Si ottiene quindi che

$$sY(s) - Y(s) = \frac{1}{s^2 - 1} Y(s) + \frac{1}{s - 1}.$$

Ne segue

$$(s - 1)Y(s) = \frac{1}{s^2 - 1} Y(s) + \frac{1}{s - 1}.$$

Portando i termini contenenti $Y(s)$ allo stesso membro,

$$\left[(s-1) - \frac{1}{s^2-1} \right] Y(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Riducendo allo stesso denominatore,

$$\left[\frac{(s-1)^2(s+1)-1}{s^2-1} \right] Y(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Si ottiene quindi

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s^2-s-1)}.$$

Si procede con la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{s+1}{s(s^2-s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2-s-1},$$

da cui si ricavano $A = -1$, $B = 1$, $C = 0$, e quindi

$$Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{s}{(s-1/2)^2 - 5/4} = -\frac{1}{s} + \frac{s-1/2}{(s-1/2)^2 - 5/4} + \frac{1/2}{(s-1/2)^2 - 5/4}$$

Queste tre funzioni sono presenti nella tabella delle trasformate. Si può quindi antitrasformare direttamente ed ottenere

$$y(t) = -1 + e^{\frac{1}{2}t} \cosh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{\frac{1}{2}t} \sinh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right).$$

Un poco più lungo è fattorizzare completamente il denominatore come $s(s-1/2-\sqrt{5}/2)(s-1/2+\sqrt{5}/2)$, e poi scrivere

$$Y = -\frac{1}{s} + \frac{A}{s-1/2-\sqrt{5}/2} + \frac{B}{s-1/2+\sqrt{5}/2}$$

e quindi

$$y = -1 + Ae^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + Be^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}.$$

I coefficienti saranno

$$A = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, \quad B = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.$$

MR-1 Il vincolo di rotolamento, con la scelta che ϑ sia la rotazione oraria, impone che lo spostamento del centro sia $R\vartheta$, ovvero se chiamiamo s la ascissa di A , allora vale $s = R\vartheta$, dove l'angolo non può essere pensato modulo 2π . Pertanto

$$OA = (R\vartheta, 0), \quad OC = OA + R\vec{j} = (R\vartheta, R),$$

$$OP = OC + CP = (R\vartheta, R) + (R \cos \varphi, R \sin \varphi) = R(\vartheta + \cos \varphi, 1 + \sin \varphi)$$

MR-2 l'energia potenziale è

$$\begin{aligned} U &= U_g^C + U_g^P + U_k^{PD} = mgR + mg OP \cdot \vec{j} + \frac{1}{2}k|PD|^2 = \\ &= mgR(1 + \sin \varphi) + \frac{1}{2}k \left((R\vartheta + R \cos \varphi)^2 + (R + R \sin \varphi - 3R)^2 \right) = \\ &= mgR(1 + \sin \varphi) + \frac{1}{2}kR^2 (\vartheta^2 + \cos^2 \varphi + 2\vartheta \cos \varphi + 4 + \sin^2 \varphi - 4 \sin \varphi) = \\ &\simeq mgR \sin \varphi + \frac{1}{2}kR^2 (\vartheta^2 + 2\vartheta \cos \varphi - 4 \sin \varphi) \end{aligned}$$

Usando il fatto che $k = 2mg/(3R)$ abbiamo che

$$U = \frac{mgR}{3} (3 \sin \varphi + \vartheta^2 + 2\vartheta \cos \varphi - 4 \sin \varphi) = \frac{mgR}{3} (\vartheta^2 + 2\vartheta \cos \varphi - \sin \varphi)$$

MR-3 Possiamo ora tralasciare il coefficiente $mgR/3$ e calcolare le derivate parziali. Le condizioni di equilibrio sono

$$\begin{cases} \partial_{\vartheta} U = 2\vartheta + 2 \cos \varphi = 0 \\ \partial_{\varphi} U = -2\vartheta \sin \varphi - \cos \varphi = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha che $\vartheta = -\cos \varphi$. Sostituendo nella seconda equazione si ottiene

$$0 = 2 \cos \varphi \sin \varphi - \cos \varphi = \cos \varphi (2 \sin \varphi - 1).$$

Questa equazione ha quattro soluzioni che corrispondono a $\cos \varphi = 0$ o da $\sin \varphi = 1/2$, e sono

$$(\vartheta, \varphi) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad (\vartheta, \varphi) = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right), \quad (\vartheta, \varphi) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6}\right), \quad (\vartheta, \varphi) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

MR-4 L'energia cinetica dell'anello si può calcolare in due modi, usiamo quello più lungo ma che funziona sempre. Il baricentro C dell'anello ha velocità $\dot{C} = (R\dot{\vartheta}, 0)$, inoltre la rotazione fornisce il contributo che si calcola con il momento di inerzia relativo al centro di massa. Si ha che

$$T_{\text{anello}} = \frac{1}{2}m|\dot{OC}|^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\vartheta}^2 = mR^2\dot{\vartheta}^2.$$

Invece l'energia cinetica del punto materiale P si calcola derivando la posizione di P

$$\dot{OP} = R(\dot{\vartheta} - \dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{\varphi} \cos \varphi),$$

e scrivendo

$$T_P = \frac{1}{2}m|\dot{OP}|^2 = \frac{1}{2}mR^2[(\dot{\vartheta} - \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi] = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 - 2\dot{\vartheta}\dot{\varphi} \sin \varphi).$$

L'energia cinetica totale è la somma delle due.

MR-5 La cosa importante da capire è che nel caso del disco o dell'anello che rotola la reazione vincolare è di una forza qualsiasi $\vec{\Phi}^A$ applicata al punto di contatto A e nessuna torsione, ovvero $\vec{\Psi}^A = 0$. La reazione vincolare è quindi determinata usando la prima equazione cardinale.

Abbiamo quindi che, all'equilibrio, $OP = (0, 3R/2)$ e quindi la forza esercitata dalla molla è

$$\vec{F}_k^P = \frac{2mg}{3R}PD = \frac{2mg}{3R} \left(0, \frac{3}{2}R\right) = (0, mg) = mg\vec{j}$$

e quindi

$$\vec{0} = \vec{\Phi}^A - mg\vec{j} - mg\vec{j} + mg\vec{j} = \vec{\Phi}^A - mg\vec{j} \implies \vec{\Phi}^A = mg\vec{j}$$

il punto P si trova sull'asse, la molla è verticale, il peso di P è tutto supportato dalla molla, l'asse delle x supporta solo il peso dell'anello.