Università degli Studi di Catania, A.A. 2025-2026

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Compito di Fisica Matematica - 19 Giugno 2026

Non è ammesso l'uso di appunti e dispositivi elettronici. Non è permesso allontanarsi dall'aula prima di avere consegnato il compito. Esibire documento d'identità. Tempo per lo svolgimento: 2h30m.

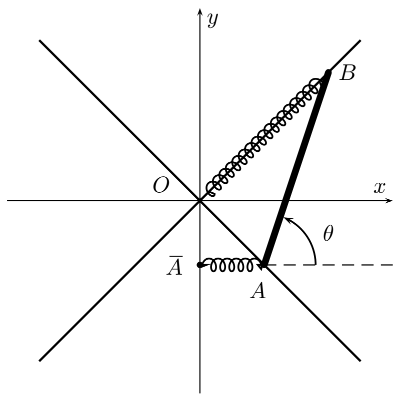
Parte A

1. Elencare le singolarità e determinare l'ordine dei poli della funzione
$$f(z) = \frac{1}{z^3(z^3+1)(z^3-8)}.$$
Valutare l'integrale $\oint_\gamma f(z)\,dz$ dove γ è la curva di equazione $|z+\frac{\pi}{2}| = 1$.

2. Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema differenziale:
$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t} + H(t-1) \\ y(0) = 0,\, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Parte B

Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da un'asta AB omogenea di lunghezza 2ℓ e massa $2m$. Gli estremi A e B dell'asta sono vincolati a scorrere senza attrito su due guide inclinate rispettivamente di $-\pi/4$ e $\pi/4$ rispetto all'orizzontale. Oltre alla forza peso, sul sistema agiscono due forze elastiche: una applicata a B di legge $F_B = -k(B-O) = k\,BO$, dove O è il punto di intersezione delle due guide; una applicata ad A di legge $F_A = -k(A-\bar{A}) = k\,A\bar{A}$, dove $\bar{A}$ è la proiezione di A sull'asse verticale passante per O. La costante elastica k delle due molle vale $k = 2\frac{mg}{\ell}$.



Si scelga il sistema di riferimento in figura, in cui le due guide risultano le rette di equazione $y=-x$ e $y=x$, e si indichi con θ l'angolo formato dal vettore $\hat{\imath}$ (versore dell'asse x) e il vettore AB. Quindi:

1. Determinare le coordinate dei punti rilevanti del sistema in funzione della variabile lagrangiana θ.
Nota: si ha $A = (\ell(\sin\theta - \cos\theta), -\ell(\sin\theta - \cos\theta))$, da cui è facile ricavare gli altri punti.
2. Calcolare il potenziale (o l'energia potenziale) totale.
3. Determinare tutte le configurazioni di equilibrio del sistema e rappresentare la configurazione con $\theta = -\pi/2$.
Nota: l'equazione per gli equilibri si può portare alla forma $a\sin^2\theta + b\sin\theta + c = 0$, risolubile con una sostituzione.
4. Studiare la stabilità di tutte le configurazioni di equilibrio.
Nota: potrebbe servire anche lo studio del segno della derivata prima.
5. Calcolare l'energia cinetica associata a un atto di moto del sistema.

Table of Laplace Transforms

	$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$		$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\dfrac{1}{s}$	2.	$\mathbf{e}^{at}$	$\dfrac{1}{s-a}$
3.	$t^n,\quad n=1,2,3,\ldots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	4.	t^p, $p > -1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5.	$\sqrt{t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6.	$t^{n-\frac{1}{2}},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7.	$\sin(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	8.	$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
9.	$t\sin(at)$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10.	$t\cos(at)$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11.	$\sin(at)-at\cos(at)$	$\dfrac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12.	$\sin(at)+at\cos(at)$	$\dfrac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13.	$\cos(at)-at\sin(at)$	$\dfrac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14.	$\cos(at)+at\sin(at)$	$\dfrac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15.	$\sin(at+b)$	$\dfrac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$	16.	$\cos(at+b)$	$\dfrac{s\cos(b)-a\sin(b)}{s^2+a^2}$
17.	$\sinh(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	18.	$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
19.	$\mathbf{e}^{at}\sin(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20.	$\mathbf{e}^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21.	$\mathbf{e}^{at}\sinh(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22.	$\mathbf{e}^{at}\cosh(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23.	$t^n\mathbf{e}^{at},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24.	$f(ct)$	$\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right)$
25.	$u_c(t)=u(t-c)$ Heaviside Function	$\dfrac{\mathbf{e}^{-cs}}{s}$	26.	$\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	$\mathbf{e}^{-cs}$
27.	$u_c(t)f(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}F(s)$	28.	$u_c(t)g(t)$	$\mathbf{e}^{-cs}\mathfrak{L}\{g(t+c)\}$
29.	$\mathbf{e}^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30.	$t^n f(t),\quad n=1,2,3,\ldots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31.	$\dfrac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,du$	32.	$\int_0^t f(v)\,dv$	$\dfrac{F(s)}{s}$
33.	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	34.	$f(t+T)=f(t)$	$\dfrac{\int_0^T \mathbf{e}^{-st}f(t)\,dt}{1-\mathbf{e}^{-sT}}$
35.	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	36.	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
37.	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$			