

Non è ammesso l'uso di appunti e dispositivi elettronici. Non è permesso allontanarsi dall'aula prima di avere consegnato il compito. Esibire documento d'identità. Tempo per lo svolgimento: 2h30m.

Parte A

1. Elencare le singolarità e determinare l'ordine dei poli della funzione

$$f(z) = \frac{z^4 - 1}{1 + \cos(\pi z^2)}.$$

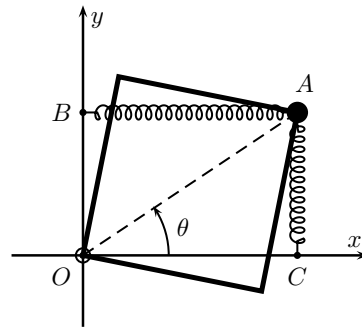
Valutare l'integrale $\oint_{\gamma} f(z) dz$ dove γ è la curva di equazione $|2z - 2i| = 1$.

2. Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema integro-differenziale:

$$\begin{cases} y'' - y' - 4y + 4 \int_0^t y(\tau) d\tau = \sin(t) \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Parte B

Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da un telaio rigido quadrato, formato da quattro aste omogenee di massa m e lunghezza $\sqrt{2}\ell$. Il vertice O del telaio è vincolato con una cerniera liscia a un punto fisso del piano, e sul vertice opposto A si trova saldato un punto materiale di massa $2m$. Oltre alla forza peso sul sistema agiscono due forze elastiche, entrambe applicate ad A , con legge $F_1 = -k_1(A - B) = k_1 AB$ e $F_2 = -k_2(A - C) = k_2 AC$, dove B e C sono le proiezioni di A rispettivamente sull'asse verticale e orizzontale passanti per la cerniera. Le costanti elastiche valgono $k_1 = \alpha \frac{mg}{\ell}$, con $\alpha > 0$, e $k_2 = \frac{mg}{\ell}$.



Si scelga il sistema di riferimento in figura, e si indichi con ϑ l'angolo formato dal vettore \hat{i} (versore dell'asse x) e il vettore OA . Quindi:

1. Determinare le coordinate dei punti rilevanti del sistema in funzione della variabile lagrangiana ϑ .
2. Calcolare il potenziale (o l'energia potenziale) totale.
3. Determinare il valore di α per cui si ha una configurazione di equilibrio $\vartheta = \pi/6$.
4. Per tale valore di α trovare tutte le configurazioni di equilibrio.
5. Calcolare l'energia cinetica associata a un atto di moto del sistema.

Table of Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. \sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12. $\sin(at) + at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13. $\cos(at) - at \sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14. $\cos(at) + at \sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	16. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
17. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23. $t^n e^{at}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
25. $u_c(t) = u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{e^{-cs}}{s}$	26. $\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	e^{-cs}
27. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	28. $u_c(t)g(t)$	$e^{-cs}\mathcal{L}\{g(t+c)\}$
29. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30. $t^n f(t), n=1,2,3,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31. $\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)du$	32. $\int_0^t f(v)dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	34. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$
35. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	36. $f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
37. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		