

Non è ammesso l'uso di appunti e dispositivi elettronici. Non è permesso allontanarsi dall'aula prima di avere consegnato il compito. Esibire documento d'identità. Tempo per lo svolgimento: 2h30m.

Parte A

1. Calcolare attraverso il teorema dei residui l'integrale (nel senso del Valor Principale):

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3 - 1} dx$$

2. Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = -4 \sin 2t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

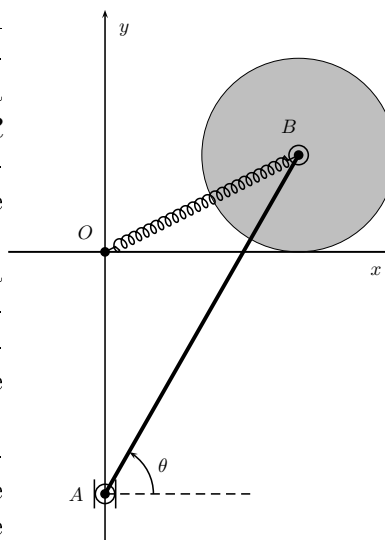
Notare che l'antitrasformazione finale richiede solo la consultazione della tabella allegata.

Parte B

Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da un disco omogeneo di raggio R e massa m , che rotola senza strisciare su una guida orizzontale, e da un'asta AB di massa m e lunghezza $4R$ il cui estremo A è vincolato tramite un carrello a scorrere su un asse verticale, mentre B è vincolato tramite una cerniera al centro del disco. I vincoli sono lisci.

Oltre alla forza peso, sul sistema agisce una molla ideale che collega il punto B al punto O di intersezione tra l'asse orizzontale e quello verticale. La costante elastica della molla vale $k = \lambda \frac{mg}{R}$, con λ costante positiva.

Si scelga il sistema di riferimento in figura, e si indichi con θ l'angolo formato dal vettore $\hat{i}$ (versore dell'asse x) e il vettore AB . Dai vincoli imposti si può ricavare che le coordinate di A sono date da $A = (0, R - 4R \sin \theta)$. Quindi:



1. Determinare le coordinate degli altri punti rilevanti del sistema in funzione della variabile lagrangiana θ .
2. Calcolare il potenziale (o l'energia potenziale) totale.
3. Discutere il numero di configurazioni di equilibrio possibili al variare di λ e determinare le configurazioni di equilibrio ottenute per $\lambda = \frac{1}{4}$.
4. Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate (per $\lambda = \frac{1}{4}$).
5. Calcolare l'energia cinetica associata a un atto di moto del sistema:
 - (a) Calcolare l'energia cinetica dell'asta.
 - (b) Calcolare l'energia cinetica del disco assumendo che la sua velocità angolare sia data dalla quantità $\dot{\varphi}$.
 - (c) Come extra credito, ricavare il legame tra φ e θ , attraverso la nota relazione tra l'ascissa del centro e l'angolo di rotazione di un disco data dal vincolo di rotolamento.

Nota: il momento d'inerzia di un disco omogeneo di massa M e raggio r rispetto al suo asse è pari a $I = \frac{1}{2}Mr^2$.

Table of Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, \quad n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. $\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, \quad n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12. $\sin(at) + at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13. $\cos(at) - at \sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14. $\cos(at) + at \sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	16. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
17. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23. $t^n e^{at}, \quad n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
25. $u_c(t) = u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{e^{-cs}}{s}$	26. $\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	e^{-cs}
27. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	28. $u_c(t)g(t)$	$e^{-cs}\mathcal{L}\{g(t+c)\}$
29. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30. $t^n f(t), \quad n=1,2,3,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31. $\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)du$	32. $\int_0^t f(v)dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	34. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$
35. $f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	36. $f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
37. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		