



AC. Si calcoli, con un opportuno cambio di variabile, l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\vartheta)}{\sin(\vartheta) - i \cos(\vartheta)} d\vartheta$$

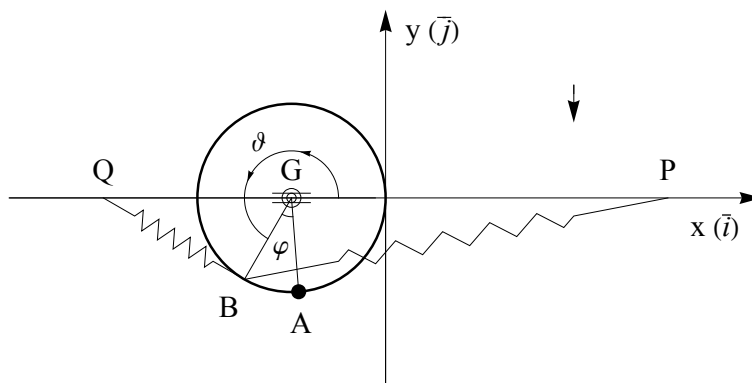
TL. Si calcoli la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$ e l'antitrasformata della funzione $g(s)$.

$$f(t) = te^{-2t} \sin(3t), \quad g(s) = \frac{s^2 + 7s + 15}{s^2 + 4s + 13}$$

Per quanto riguarda la prima funzione, si ricordi che l'esponenziale crea una traslazione, e che la moltiplicazione per t crea una derivata. Per quanto riguarda la seconda funzione, si ricordi che un primo passaggio richiede l'algoritmo della divisione.

MR. In un piano in cui si è scelto un sistema di riferimento inerziale $(O, \vec{i}, \vec{j})$, con $\vec{j}$ verticale ascendente, giace un sistema meccanico costituito da un disco omogeneo di raggio R e massa m . Il centro G del disco è vincolato tramite una cerniera ad un carrello che può scorrere sull'asse delle x .

Su di un punto A nel bordo del disco è fissato un punto materiale di massa m , su di un altro punto B nel bordo del disco sono fissate due molle di costante elastica $k = mg/R$. La prima molla collega il punto B con il punto Q di coordinate $OQ = (-3R, 0)$, la seconda molla collega il punto B con il punto P di coordinate $OP = (3R, 0)$. Sul sistema agisce la forza di gravità.



Si scelga il sistema di riferimento in figura, in cui la coordinata lineare s è la coordinata x di G , mentre l'angolo ϑ è l'angolo orientato tra $\vec{i}$ e GB . Per formalizzare le energie potenziali serve anche un ulteriore angolo φ , che è l'angolo orientato che si forma tra GB e GA . Si osservi che, siccome A è saldato al bordo del disco una volta per tutte ma non sappiamo ancora dove, φ non è una coordinata lagrangiana, ma un parametro non ancora definito, al quale cercheremo in seguito di assegnare un valore in base a certe richieste (si veda punto 3).

1. Determinare le coordinate dei punti rilevanti in funzione delle coordinate lagrangiane s e ϑ .
2. Calcolare il potenziale o l'energia potenziale del sistema.
3. Determinare i valori di φ affinché esista un equilibrio con $\vartheta = \pi/6$. Tra i due valori si scelga $\varphi = \pi$.
4. Per tale scelta di φ , si determinino tutte le altre configurazioni di equilibrio.
5. Si studi la stabilità di tali configurazioni di equilibrio.

Table of Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, \quad n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. $\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, \quad n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12. $\sin(at) + at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13. $\cos(at) - at \sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14. $\cos(at) + at \sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	16. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
17. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23. $t^n e^{at}, \quad n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
25. $u_c(t) = u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{e^{-cs}}{s}$	26. $\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	e^{-cs}
27. $u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$	28. $u_c(t) g(t)$	$e^{-cs} \mathcal{L}\{g(t+c)\}$
29. $e^{ct} f(t)$	$F(s-c)$	30. $t^n f(t), \quad n=1,2,3,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31. $\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(u) du$	32. $\int_0^t f(v) dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33. $\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$	$F(s) G(s)$	34. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1-e^{-sT}}$
35. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	36. $f''(t)$	$s^2 F(s) - sf'(0) - f''(0)$
37. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		

AC Il denominatore è il prodotto di $(z+2)^2 + 1$, che porge due singolarità in $-2 + I$ e $-2 - I$ che sono poli semplici, ed una singolarità in 3, che è pure polo semplice.

Quindi si può scegliere il solito cammino $ABCD A$ con un grande cerchio DA che porge un contributo chiaramente nullo, un piccolo cerchio BC che circonda il polo 3 e che porge il contributo di

$$\int_{BC} f(z) dz = -\pi i \frac{3 \cdot 3 + 4}{(3^2 + 4 \cdot 3 + 5)} = -\pi i \frac{13}{26} = -\frac{\pi}{2} i$$

ed un polo interno che porge il contributo di

$$\int_{ABCD A} f(z) dz = \frac{\pi}{2} (1 - i).$$

Si ricava quindi che

$$\int_{AB+CD} f(z) dz = \frac{\pi}{2} (1 - i) + \frac{\pi}{2} i = \frac{\pi}{2}$$

TL Si tratta di una rielaborazione dell'esercizio davvero proposto in classe, perché la trattazione formale si poteva fare e portava ad un risultato, ma avevamo ignorato un problema di convergenza, che in realtà è collegato alla ascissa di convergenza. Approciamo il problema.

Trasformando l'equazione si ha

$$s^3 Y - s^2 - 2s - 3 + Y = \frac{1}{s+1}$$

e si ricava che

$$Y = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 1} + \frac{1}{(s+1)(s^3 + 1)} = \frac{s^3 + 3s^2 + 5s + 4}{(s+1)(s^3 + 1)}$$

A questo punto non dobbiamo antitrasformare, ma se lo facessimo otterremmo che

$$y(t) = \frac{e^{-t}t}{3} + e^{-t} + \frac{16e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)}{3\sqrt{3}}.$$

Una rapida ricognizione della funzione di partenza ci permette di capire che l'ascissa di convergenza della funzione $\sigma(y) = 1/2$, infatti quel $e^{t/2}$ che moltiplica il seno impedisce la convergenza dell'integrale a meno che non si moltiplichino y per una esponenziale che decade almeno come $e^{-t/2}$.

A questo punto ci basta osservare che

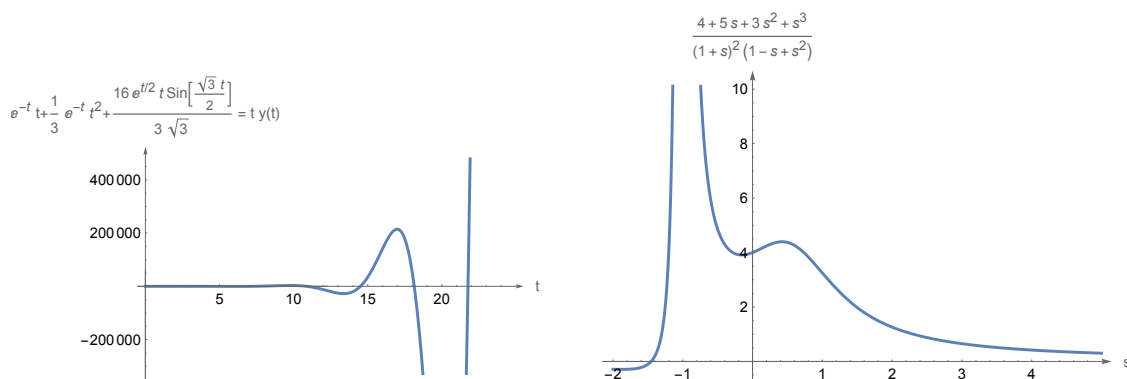
$$\mathcal{L}(ty) = -Y'(s) = (-1 - 5s + 11s^2 + 13s^3 + 5s^4 + s^5)/((1+s)^3(1-s+s^2)^2).$$

e che quindi

$$\mathcal{L}(ty)(1) = \frac{24}{8} = 3.$$

Se avessimo calcolato $\mathcal{L}(ty)(0)$ avremmo ottenuto -1 , ma non sarebbe stato corretto dal momento che l'integrale (2) non converge.

Domanda (la cui risposta non conosco): conosco la trasformata $Y(s)$, posso dedurre l'ascissa di convergenza della funzione $y(t)$? Io personalmente ad $1/2$ vedo solo un innocente massimo locale. Il denominatore della funzione $Y(s)$ ha poli in -1 ed in $1/2 \pm \sqrt{3}/2$, di sicuro questi sono i poli responsabili della ascissa di convergenza.



MR 1. Le posizioni dei punti sono

$$OC = (-R\vartheta, 0), \quad OG = (-R\vartheta, R), \quad OA = (-R\vartheta, R) + R(\cos \vartheta, \sin \vartheta), \quad OP = (r, r)$$

2. L'energia potenziale è

$$\begin{aligned} U &= U_g^P + U_k^{AP} = Mgr + \frac{1}{2}k|(-R\vartheta + R\cos \vartheta - r, R + R\sin \vartheta - r)|^2 = \\ &= Mgr + \frac{1}{2}k(R^2\vartheta^2 + R^2\cos^2 \vartheta + r^2 - 2R^2\vartheta\cos \vartheta + 2Rr\vartheta - 2rR\cos \vartheta + R^2 + R^2\sin^2 \vartheta + r^2 + 2R^2\sin \vartheta - 2rR - 2rR\sin \vartheta) \\ &= Mgr + \frac{1}{2}k(R^2\vartheta^2 + 2r^2 - 2R^2\vartheta\cos \vartheta + 2Rr\vartheta - 2rR(\cos \vartheta + \sin \vartheta) + 2R^2\sin \vartheta - 2rR) \end{aligned}$$

3. Per determinare gli equilibri si deriva

$$\begin{cases} \partial_r U = Mg + \frac{1}{2}k(4r + 2R\vartheta - 2R(\cos \vartheta + \sin \vartheta) - 2R) = 0 \\ \partial_\vartheta U = 2R^2\vartheta - 2R^2\cos \vartheta + 2R^2\vartheta\sin \vartheta + 2Rr - 2rR(-\sin \vartheta + \cos \vartheta) + 2R^2\cos \vartheta = 0 \end{cases}$$

non sono un sistema facile da risolvere, ma dobbiamo sostituire $\pi/2$ nelle equazioni, per cui si ottiene che

$$\begin{cases} \partial_r U = Mg + \frac{1}{2}k(4r + R\pi - 2R - 2R) = 0 \\ \partial_\vartheta U = R^2\pi + R^2\pi + 2Rr + 2rR = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava che

$$r = -\frac{R\pi}{2}, \quad k = \frac{2Mg}{R(4 + \pi)}$$

4. Si tratta di un disco spostato indietro nella ordinata $-R\pi/2$, con A in verticale sopra a G , e P in verticale appeso sotto a G . La molla è rigida quanto basta affinché P si trovi in equilibrio in quel punto.

5. Si potrebbe cercare di usare le equazioni dell'equilibrio, ed ottenere

$$\begin{cases} \partial_r U = Mg + \frac{1}{2}k(4r - 2R - 2R) = 0 \\ \partial_\vartheta U = -2R^2 + 2Rr - 2rR + 2R^2 = 0 \end{cases}$$

La seconda è sempre vera, la prima dice che $r = \frac{2kR - Mg}{2k}$, che indica infinite posizioni per P , una per ogni scelta di k , che vanno da $OP = (R, R)$ (quando k diventa infinita) a tutti gli OP sulla semiretta decrescente al decrescere del valore di k .

Pensando alle equazioni cardinali applicate al disco si ha che

$$\vec{\Phi}^C - mg\vec{j} + k(r - R)\vec{i} + k(r - R)\vec{i} = \vec{0}, \quad CC \times \vec{\Phi}^C - CG \times (mg\vec{j}) + CA \times (k(r - R)\vec{i} + k(r - R)\vec{i}) = \vec{0}.$$

Entrambe queste equazioni sono soddisfatte con

$$\vec{\Phi}^C = (k(r - R), mg + k(r - R))$$

(la seconda equazione è sempre vera).

D'altro canto per quanto riguarda P si ha che

$$\varphi^P(1, -1) + (0, -Mg) + (k(r - R), k(r - R)) = (0, 0) \Rightarrow \varphi^P(1, -1) = (k(R - r), Mg + k(R - r))$$

Questa seconda equazione può essere soddisfatta solo se $r < R$, perché bisogna che $k(r - R) + Mg = -k(r - R)$, ovvero $2k(R - r) = Mg$ e quindi $R - r > 0$. Ogni volta che questa condizione è soddisfatta, allora esiste un k che renda possibile quella configurazione di equilibrio.