Università degli Studi di Catania, A.A. 2024-2025

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale

Compito di Fisica Matematica - 20 Giugno 2025

Non è ammesso l'uso di appunti e dispositivi elettronici. Non è permesso allontanarsi dall'aula prima di avere consegnato il compito. Esibire documento d'identità. Tempo per lo svolgimento: 2h30m.

Parte A

1. Classificare le singolarità della funzione

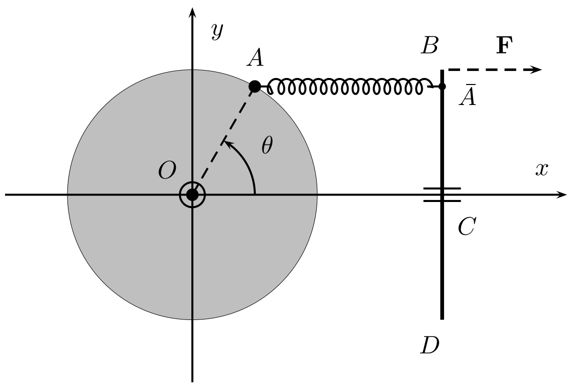
$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(z^2+z)^2(z^2+1)}$$

e valutare l'integrale $\oint_\gamma f(z)\,dz$, dove γ è la curva di equazione $|z-1-i| = 2$.

2. Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} y' + 3\,y * \cos t \ = H(t-1) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Parte B



Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da un disco omogeneo di raggio R e massa $2m$ il cui centro è vincolato tramite una cerniera a un punto fisso O del piano. Sul bordo del disco è saldato un punto materiale A di massa m.

È presente inoltre un'asta BD di lunghezza $2R$ e massa m vincolata tramite un pattino a restare verticale, col suo punto medio C scorrevole lungo l'asse orizzontale passante per O.

Oltre alla forza peso, sul sistema agiscono: una molla ideale che collega il punto A al punto $\bar{A}$, con $\bar{A}$ proiezione orizzontale di A sull'asta BD; una forza costante $F = (mg, 0)$ applicata in B. La cerniera e il pattino si intendono privi di attrito. La costante elastica della molla è pari a $k = \sqrt{2}\,mg/R$.

Si scelga il sistema di riferimento in figura, in cui si ha $C = (s, 0)$, e si indichi con θ l'angolo formato da $\hat{\imath}$ (versore dell'asse x) e il vettore OA. Quindi:

1. determinare le coordinate dei punti rilevanti del sistema in funzione delle variabili lagrangiane s e θ,
2. calcolare il potenziale (o l'energia potenziale) totale,
3. determinare tutte le configurazioni di equilibrio del sistema,
4. studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate,
5. calcolare le forze di reazione vincolare in O e C, e il momento di reazione in C *in una delle due configurazioni di equilibrio* (si consiglia di eseguire il calcolo considerando separatamente l'equilibrio delle due parti del sistema, disco e asta).

Table of Laplace Transforms

	$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$		$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}$	2.	$\mathbf{e}^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
3.	$t^n, \quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4.	$t^p, p>-1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5.	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6.	$t^{n-\frac{1}{2}}, \quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7.	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9.	$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10.	$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11.	$\sin(at)-at\cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12.	$\sin(at)+at\cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13.	$\cos(at)-at\sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14.	$\cos(at)+at\sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15.	$\sin(at+b)$	$\frac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$	16.	$\cos(at+b)$	$\frac{s\cos(b)-a\sin(b)}{s^2+a^2}$
17.	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19.	$\mathbf{e}^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20.	$\mathbf{e}^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21.	$\mathbf{e}^{at}\sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22.	$\mathbf{e}^{at}\cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23.	$t^n\mathbf{e}^{at}, \quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24.	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
25.	$u_c(t)=u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{\mathbf{e}^{-cs}}{s}$	26.	$\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	$\mathbf{e}^{-cs}$
27.	$u_c(t)f(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}F(s)$	28.	$u_c(t)g(t)$	$\mathbf{e}^{-cs}\mathfrak{L}\{g(t+c)\}$
29.	$\mathbf{e}^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30.	$t^n f(t), \quad n=1,2,3,\ldots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31.	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^{\infty}F(u)\,du$	32.	$\int_0^t f(v)\,dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33.	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	34.	$f(t+T)=f(t)$	$\frac{\int_0^T \mathbf{e}^{-st}f(t)\,dt}{1-\mathbf{e}^{-sT}}$
35.	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	36.	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
37.	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$			