

Università degli Studi di Catania

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale, A.A. 2024-2025

Compito di Fisica Matematica - 28 Marzo 2025

Non è ammesso l'uso di appunti e dispositivi elettronici. Non è permesso allontanarsi dall'aula prima di avere consegnato il compito. Esibire documento d'identità. Tempo per svolgimento: 2h30m.

Parte A

1. Calcolare

$$\oint_{\gamma} \frac{z^2 - \pi^2}{z \sin(2z)} dz,$$

dove γ è il rettangolo di vertici opposti $-1 - i, 4 + i$ e con lati paralleli agli assi, percorso in senso antiorario.

2. Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = 5e^{2t} + 2e^{-t} \\ y(0) = 2, y'(0) = 2 \end{cases}$$

Parte B

Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da un'asta omogenea di estremi B, C , con massa $4m$ e lunghezza $|BC| = 4L$. Nel punto medio A di BC è saldato l'estremo di un'altra asta omogenea AD , perpendicolare a BC , di lunghezza $2L$ e massa $2m$.

Il punto A è vincolato a scorrere su una guida orizzontale tramite un carrello privo di attrito. Oltre alla forza peso, sul sistema agiscono due forze elastiche applicate rispettivamente ai punti B e C , con leggi $F_b = -k_b(B - \bar{B}) = k_b B\bar{B}$ e $F_c = -k_c(C - \bar{C}) = k_c C\bar{C}$ dove \bar{B}, \bar{C} sono rispettivamente le proiezioni di B, C su un asse fisso verticale. Le costanti elastiche valgono $k_b = \frac{mg}{3L}$ e $k_c = \frac{mg}{L}$.

Si scelga il sistema di riferimento in figura, in cui si ha $A = (s, 0)$, e si indichi con θ l'angolo formato da \hat{i} (versore dell'asse x) e il vettore AC . Quindi:

- 1) determinare le coordinate dei punti rilevanti del sistema in funzione delle variabili lagrangiane s e θ ,
- 2) calcolare il potenziale (o l'energia potenziale) totale,
- 3) determinare tutte le configurazioni di equilibrio del sistema,
- 4) studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate,
- 5) calcolare l'energia cinetica associata a un atto di moto del sistema.

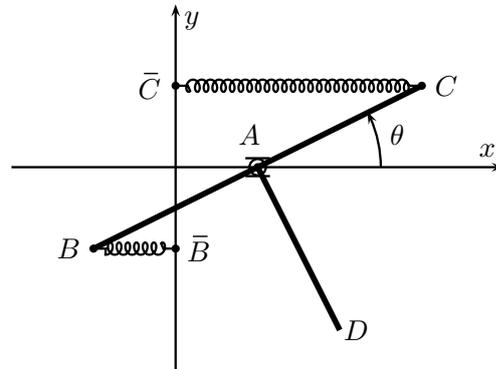


Table of Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. \sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12. $\sin(at) + at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13. $\cos(at) - at \sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14. $\cos(at) + at \sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	16. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
17. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23. $t^n e^{at}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
25. $u_c(t) = u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{e^{-cs}}{s}$	26. $\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	e^{-cs}
27. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	28. $u_c(t)g(t)$	$e^{-cs}\mathcal{L}\{g(t+c)\}$
29. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30. $t^n f(t), n=1,2,3,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31. $\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)du$	32. $\int_0^t f(v)dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	34. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$
35. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	36. $f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
37. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		