Fisica Matematica	——————	L.T. in Ingegneria Industriale
II Appello Invernale	A.A. 2024–25	25 febbraio 2025 (2h 30m)

AC. Si determinino le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{(z+\sqrt{\pi/2})(z-i\sqrt{\pi/2})(z+i\sqrt{\pi/2})}{\cos(z^2)}$$

e si calcoli il loro ordine di polo (non si calcoli il residuo!). Si calcoli il valore di

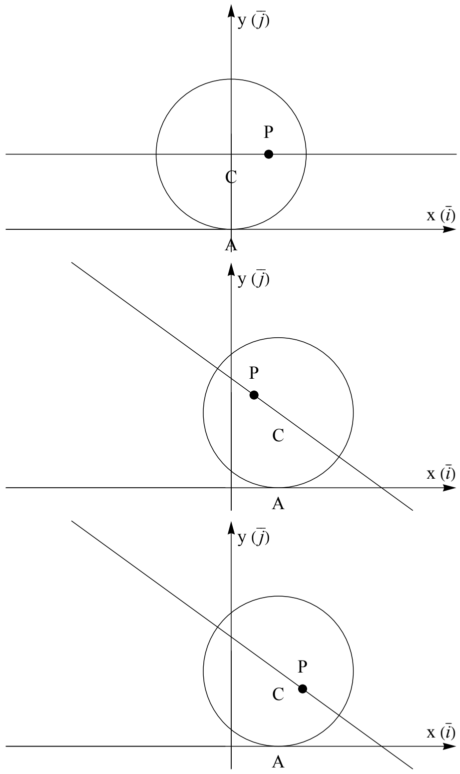
$$\oint_\gamma f(z)dz$$

dove γ è il bordo del disco di raggio π centrato in 0.

TL. Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2y'' - 4y' - 16y = 2e^{-3t} \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

MR. In un sistema di riferimento $O, \vec{i}, \vec{j}$ con $\vec{j}$ verticale ascendente (quindi agisce la forza di gravità) giace un sistema materiale costituito da un disco di centro C, raggio R, massa m. Il disco può rotolare senza strisciare sull'asse delle x, per convenienza chiamiamo A il punto di contatto tra il disco e l'asse. Lungo un diametro del disco è fissata una guida senza massa lungo la quale può scorrere un punto materiale P di massa m. La guida è attaccata al diametro che è orizzontale quando il disco poggia sull'origine (si veda la prima figura). Quando il disco rotola la guida ruota solidalmente ad esso (si veda la seconda figura) ed il punto P si può muovere lungo tale guida. Il punto P è colllegato da una molla di costante elastica $2mg/R$ al centro C del disco.
Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo ϑ di cui è ruotato il disco e la coordinata s dello scostamento con segno del punto P dal punto C lungo il diametro (la differenza tra s positivo o negativo è rappresentato nella seconda e terza immagine).



1. Si calcolino le posizioni dei punti A, C, P in funzione delle coordinate Lagrangiane.

2. Si calcoli il potenziale e l'energia potenziale totale del sistema.

3. Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema.

4. Si discuta la stabilità di tali posizioni di equilibrio.

5. Si calcoli l'energia cinetica associata ad un atto di moto del sistema.

Table of Laplace Transforms

	$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$		$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\dfrac{1}{s}$	2.	$\mathbf{e}^{at}$	$\dfrac{1}{s-a}$
3.	$t^n,\quad n=1,2,3,\ldots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	4.	$t^p,\ p>-1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5.	$\sqrt{t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6.	$t^{n-\frac{1}{2}},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7.	$\sin(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	8.	$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
9.	$t\sin(at)$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10.	$t\cos(at)$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11.	$\sin(at)-at\cos(at)$	$\dfrac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12.	$\sin(at)+at\cos(at)$	$\dfrac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13.	$\cos(at)-at\sin(at)$	$\dfrac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14.	$\cos(at)+at\sin(at)$	$\dfrac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15.	$\sin(at+b)$	$\dfrac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$	16.	$\cos(at+b)$	$\dfrac{s\cos(b)-a\sin(b)}{s^2+a^2}$
17.	$\sinh(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	18.	$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
19.	$\mathbf{e}^{at}\sin(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20.	$\mathbf{e}^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21.	$\mathbf{e}^{at}\sinh(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22.	$\mathbf{e}^{at}\cosh(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23.	$t^n\mathbf{e}^{at},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24.	$f(ct)$	$\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right)$
25.	$u_c(t)=u(t-c)$ Heaviside Function	$\dfrac{\mathbf{e}^{-cs}}{s}$	26.	$\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	$\mathbf{e}^{-cs}$
27.	$u_c(t)f(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}F(s)$	28.	$u_c(t)g(t)$	$\mathbf{e}^{-cs}\mathfrak{L}\{g(t+c)\}$
29.	$\mathbf{e}^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30.	$t^n f(t),\quad n=1,2,3,\ldots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31.	$\dfrac{1}{t}f(t)$	$\int_s^{\infty}F(u)\,du$	32.	$\int_0^t f(v)\,dv$	$\dfrac{F(s)}{s}$
33.	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	34.	$f(t+T)=f(t)$	$\dfrac{\int_0^T \mathbf{e}^{-st}f(t)\,dt}{1-\mathbf{e}^{-sT}}$
35.	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	36.	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
37.	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$			