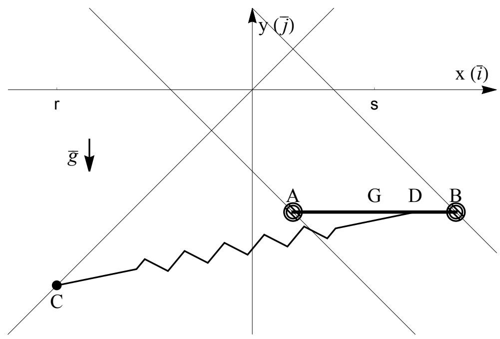
AC. Calcolare i seguenti residui:

$$\operatorname{res}\left(\frac{\cos(2z)-1}{z^3}, 0\right), \quad \operatorname{res}\left(\tan z, \frac{\pi}{2}\right), \quad \operatorname{res}\left(\frac{1}{\sinh z} - \frac{1}{z}, 0\right)$$

TL. Si trasformi la funzione (a) e si antitrasformi la funzione (b)

$$(a) \quad \big(\sin(3t) * \cos(5t)\big) * t^7 \qquad (b) \quad \frac{s^3+s+2}{(s-1)(s^2+2s+2)(s^2+1)}$$

MR. Un sistema meccanico è vincolato a muoversi in un piano verticale, nel quale si è scelto un sistema di riferimento $O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}$ con $\vec{\jmath}$ verticale ascendente. In tale piano giace un sistema materiale costituito da un'asta AB di lunghezza 2ℓ, massa $2m$ (due!), e centro di massa G. L'estremo A dell'asta è vincolato da un carrello a muoversi lungo la rotaia di equazione $y = -x - \ell$, l'estremo B dell'asta è vincolato da un carrello a muoversi lungo la rotaia di equazione $y = -x + \ell$. Si osservi che l'asta in questo modo può scorrere lungo la diagonale rimanendo sempre parallela all'asse delle x senza bisogno che il vincolo eserciti torsioni in A o B, e che il centro di massa G si muove lungo la retta di equazione $y = -x$. Un punto materiale C di massa m è infine vincolato a muoversi lungo la retta di equazione $y = x$.



Tra il punto materiale C ed un punto D dell'asta posto lungo l'asta a distanza $1/2\ell$ da B ed a distanza $3/2\ell$ da A è fissata una molla di costante elastica mg/ℓ. Sul sistema agisce la gravità. Usando come coordinate lagrangiane s la coordinata x di G ed r la coordinata x di C, ovvero $s = OG \cdot \vec{\imath}, \quad r = OC \cdot \vec{\imath}$.

1. determinare le coordinate dei punti rilevanti del sistema in funzione delle variabili lagrangiane r, s;
2. calcolare il potenziale o l'energia potenziale totale;
3. scrivere le equazioni per gli equilibri del sistema, determinare l'unico equilibrio del sistema, disegnare il sistema all'equilibrio;
4. calcolare le reazioni che il vincolo esercita su A e su B. Si usino entrambe le equazioni cardinali, ricordando che la torsione in A e B è nulla, mentre le reazioni vincolari $\vec{\Phi}_A$ e $\vec{\Phi}_B$ sono perpendicolari al vincolo;
5. scrivere l'energia cinetica associata ad un atto di moto del sistema.

Table of Laplace Transforms

	$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$		$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}$	2.	$\mathbf{e}^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
3.	$t^n, \quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4.	$t^p, p>-1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5.	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6.	$t^{n-\frac{1}{2}}, \quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7.	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9.	$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10.	$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11.	$\sin(at)-at\cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12.	$\sin(at)+at\cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13.	$\cos(at)-at\sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14.	$\cos(at)+at\sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15.	$\sin(at+b)$	$\frac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$	16.	$\cos(at+b)$	$\frac{s\cos(b)-a\sin(b)}{s^2+a^2}$
17.	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19.	$\mathbf{e}^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20.	$\mathbf{e}^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21.	$\mathbf{e}^{at}\sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22.	$\mathbf{e}^{at}\cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23.	$t^n\mathbf{e}^{at}, \quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24.	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
25.	$u_c(t)=u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{\mathbf{e}^{-cs}}{s}$	26.	$\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	$\mathbf{e}^{-cs}$
27.	$u_c(t)f(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}F(s)$	28.	$u_c(t)g(t)$	$\mathbf{e}^{-cs}\mathfrak{L}\{g(t+c)\}$
29.	$\mathbf{e}^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30.	$t^n f(t), \quad n=1,2,3,\ldots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31.	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,du$	32.	$\int_0^t f(v)\,dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33.	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	34.	$f(t+T)=f(t)$	$\frac{\int_0^T \mathbf{e}^{-st}f(t)\,dt}{1-\mathbf{e}^{-sT}}$
35.	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	36.	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

37. $f^{(n)}(t)$ $\qquad s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$

AC

TL
La decomposizione in fratti semplici è

$$\frac{s-3}{5\left(s^2+1\right)}-\frac{3s}{5\left(s^2+2s+2\right)}+\frac{2}{5(s-1)}$$

e qiundi l'antitrasformata è

$$\frac{2}{5}e^t+\frac{1}{5}(\cos t-3\sin t)-\frac{3}{5}e^{-t}(\cos t-\sin t)$$

MR 1. I punti rilevanti sono

$$OC=(r,r),\quad OG=(s,-s),\quad OA=(s-\ell,-s),\quad OB=(s+\ell,-s),\quad OD=(s+\ell/2,-s)$$

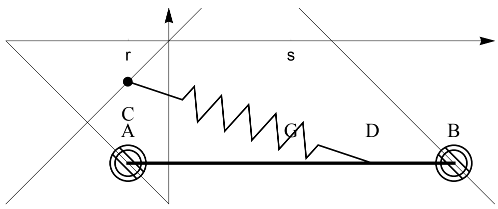
2. L'energia potenziale è la somma di

$$U=U_g^G+U_g^C+U_k^{CD}=2mg(-s)+mgr+\frac{1}{2}\frac{mg}{\ell}\left((r-s-\ell/2)^2+(r+s)^2)\right)=$$
$$=\frac{mg}{2\ell}\left(2\ell r-4\ell s+2r^2+2s^2-r\ell+s\ell\right)=\frac{mg}{2\ell}\left(\ell r-3\ell s+2r^2+2s^2\right)$$

3. Dimentichiamo il fattore $mg/(2\ell)$ e deriviamo. Si ha che le condizioni per l'equilibrio sono:

$$\begin{cases}0=U_r=\ell-4r\\ 0=U_s=-3\ell+4s\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}r=-\frac{\ell}{4}\\ s=\frac{3}{4}\ell.\end{cases}$$

Si ha quindi che l'unico equilibrio possibile ha il centro di massa G posto in $(3\ell/4,-3\ell/4)$, D posto in $(5\ell/4,-3\ell/4)$, B in $(7\ell/4,-3\ell/4)$, A in $(-\ell/4,-3\ell/4)$ e C in $(-\ell/4,-\ell/4)$.



4. Per determinare le reazioni vincolari si devono impostare le due equazioni cardinali, conviene usare A o B, si sa che la reazione vincolare in A è $\vec{\Phi}_A=(\varphi,\varphi)$, mentre quella in B è $\vec{\Phi}_A=(\psi,\psi)$. Si ha che

$$\vec{\Phi}_A+\vec{\Phi}_B-2mg\vec{j}+\frac{mg}{\ell}DC=\vec{0},\qquad AA\times\vec{\Phi}_A+AG\times(-mg\vec{j})+AD\times\frac{mg}{\ell}DC+AB\times\vec{\Phi}_B=\vec{0}$$

che diventa

$$(\varphi,\varphi)+(\psi,\psi)+(0,-2mg)+\frac{mg}{\ell}(-3\ell/2,\ell/2)=\vec{0},\qquad(\ell,0)\times(0,-2mg)+(3\ell/2,0)\times\frac{mg}{\ell}(-3\ell/2,\ell/2)+(2\ell,0)\times(\phi,\phi)=\vec{0}$$

ovvero

$$\varphi+\psi-\frac{3}{2}mg=0,\qquad-2mg\ell\vec{k}+3\frac{\ell}{2}\frac{mg}{\ell}\frac{\ell}{2}\vec{k}+2\ell\psi\vec{k}=\vec{0}$$
$$\varphi+\psi=\frac{3}{2}mg,\qquad\psi=\frac{5}{8}mg\qquad\Rightarrow\varphi=\frac{7}{8}mg$$