

Università degli Studi di Catania

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale, A.A. 2023-2024

Compito di Fisica Matematica - 28 Marzo 2024

Non è ammesso l'uso di appunti e dispositivi elettronici. Non è permesso allontanarsi dall'aula prima di avere consegnato il compito. Esibire documento d'identità. Tempo per svolgimento: 2h30m.

Parte A

1. Trovare tutte le singolarità della funzione (non è richiesto di studiare il tipo di singolarità o eventuale ordine dei poli)

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\sin(\pi z^2)}$$

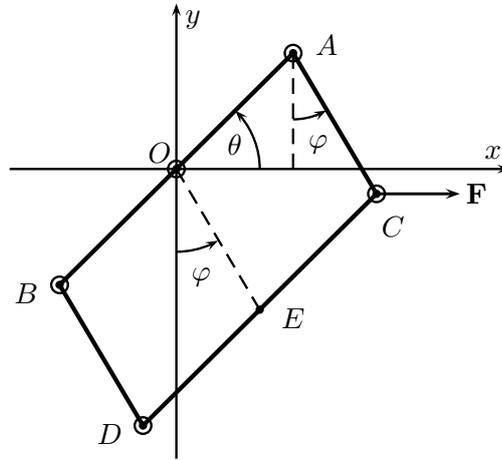
e valutare $\oint_C f(z) dz$ dove C è la curva di equazione $|z - \frac{1}{2}i| = 1$.

2. Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 4(t-1)H(t-1) \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Parte B

Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da quattro aste omogenee, due di lunghezza $2L$ e massa $2m$, e due di lunghezza L e massa m , articolate tra di loro con cerniere lisce, in modo da formare un **parallelogramma** di vertici A, B, C, D come da figura (con $|AB| = |CD| = 2L$ e $|AC| = |BD| = L$). Il punto medio dell'asta AB è vincolato tramite una cerniera liscia a un punto O del piano. Oltre la forza peso, sul sistema agisce una forza orizzontale costante $\mathbf{F} = (3mg, 0)$ applicata al vertice C . Notare che per la simmetria del sistema il centro di massa delle quattro aste si troverà nel centro geometrico del parallelogramma, ovvero nel punto medio di OE , essendo E il punto medio dell'asta CD .



Assunti il sistema di riferimento in figura, e le variabili lagrangiane θ, φ , con θ angolo formato dal versore dell'asse orizzontale e il vettore OA , e φ angolo formato dall'opposto del versore dell'asse verticale e il vettore OE (per chiarezza è evidenziato anche un altro angolo di ampiezza uguale a φ):

- 1) Determinare le coordinate dei punti rilevanti del sistema in funzione delle variabili lagrangiane.
- 2) Calcolare il potenziale (o l'energia potenziale) totale.
- 3) Trovare tutte le configurazioni di equilibrio del sistema.
- 4) Studiare la stabilità delle configurazioni aventi $\theta = 0$.
- 5) Calcolare l'energia cinetica totale del sistema (notare che la rotazione delle aste AC e BD è legata all'angolo φ , mentre la rotazione delle aste AB e CD dipende da θ).

Table of Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. \sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12. $\sin(at) + at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13. $\cos(at) - at \sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14. $\cos(at) + at \sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	16. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
17. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23. $t^n e^{at}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
25. $u_c(t) = u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{e^{-cs}}{s}$	26. $\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	e^{-cs}
27. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	28. $u_c(t)g(t)$	$e^{-cs}\mathcal{L}\{g(t+c)\}$
29. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30. $t^n f(t), n=1,2,3,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31. $\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)du$	32. $\int_0^t f(v)dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	34. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$
35. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	36. $f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
37. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		