Fisica Matematica — L.T. in Ingegneria Industriale

I Appello Recupero A.A. 2023–24 22 dicembre 2023 (2h 30m)

AC. Si determinino tutte le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} + \frac{1}{\cos z}$$

e si calcolino i loro residui (vista la periodicità, basta calcolarne 4). Si calcoli inoltre l'integrale

$$\oint_C f(z)dz$$

dove C è il rettangolo con lati paralleli agli assi e di vertici opposti $-3+i$ e $3-i$.

TL. Tramite le trasformate di Laplace, si trovino la soluzione all'equazione differenziale

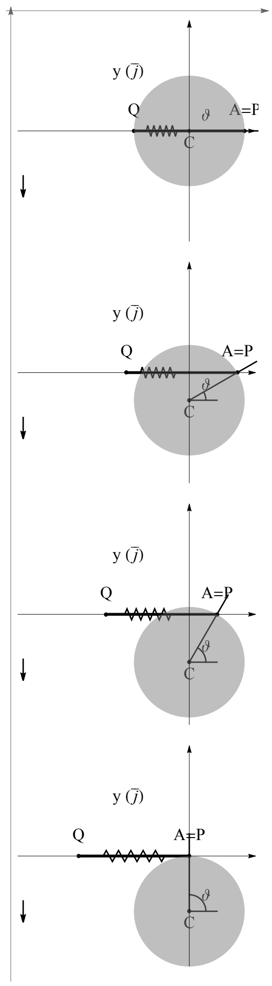
$$y''' + 2y'' + 5y' = 10\cos t$$

tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 5$.

MR. In un sistema di riferimento inerziale $O, \vec{i}, \vec{j}$ con $\vec{j}$ verticale ascendente, giacciono una lamina circolare omogenea, di massa m e raggio R il cui centro C è vincolato a muoversi lungo l'asse delle y. Ad un punto A nel bordo della lamina è vincolato l'estremo P di un'asta PQ di lunghezza $2R$ e massa m i cui estremi Q e P sono vincolati a scorrere lungo l'asse delle x come in figura (ovvero $QP = 2R\vec{i}$).
Oltre alla forza peso, il punto Q del sistema è soggetto a una forza elastica

$$\vec{F}_k^Q = -\alpha\frac{mg}{R}(Q-O) = \alpha\frac{mg}{R}QO$$

dovuta ad una molla di costante elastica $\alpha mg/R$ che collega Q all'origine O del sistema di riferimento.
Assunto il sistema di riferimento in figura e detto ϑ l'angolo orientato tra il versore $\vec{i}$ ed il vettore CA,



1. Determinare le coordinate dei punti rilevanti del sistema in funzione della coordinata lagrangiana ϑ. (Suggerimento: si osservi che il vettore $CA = (R\cos\vartheta, R\sin\vartheta)$, e poi si usi il fatto che $OA = (a, 0)$ ed $OC = (0, c)$ e quindi...)

2. Calcolare il potenziale (o l'energia potenziale) del sistema.

3. Determinare il valore di α affinché la configurazione $\vartheta = \pi/3$ sia di equilibrio.

4. Come detto, l'asta scorre lungo l'asse delle x attraverso due pattini in P e Q (esercita solo le reazioni vincolari $\vec{\Phi}^P = \varphi^P\vec{j}$ e $\vec{\Phi}^Q = \varphi^Q\vec{j}$). Calcolare le tre reazioni vincolare in C, P e Q nella configurazione di equilibrio. (Extracredito: riuscite anche a calcolare la reazione interna $\vec{\Phi}_P^A$ che P esercita su A?)

5. Calcolare l'energia cinetica del sistema.

Table of Laplace Transforms

	$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$		$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}$	2.	$\mathbf{e}^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
3.	$t^n,\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4.	$t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5.	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6.	$t^{n-\frac{1}{2}},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7.	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9.	$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10.	$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11.	$\sin(at)-at\cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12.	$\sin(at)+at\cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13.	$\cos(at)-at\sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14.	$\cos(at)+at\sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15.	$\sin(at+b)$	$\frac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$	16.	$\cos(at+b)$	$\frac{s\cos(b)-a\sin(b)}{s^2+a^2}$
17.	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19.	$\mathbf{e}^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20.	$\mathbf{e}^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21.	$\mathbf{e}^{at}\sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22.	$\mathbf{e}^{at}\cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23.	$t^n\mathbf{e}^{at},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24.	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
25.	$u_c(t)=u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{\mathbf{e}^{-cs}}{s}$	26.	$\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	$\mathbf{e}^{-cs}$
27.	$u_c(t)f(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}F(s)$	28.	$u_c(t)g(t)$	$\mathbf{e}^{-cs}\mathfrak{L}\{g(t+c)\}$
29.	$\mathbf{e}^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30.	$t^n f(t),\quad n=1,2,3,\ldots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31.	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^{\infty} F(u)\,du$	32.	$\int_0^t f(v)\,dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33.	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	34.	$f(t+T)=f(t)$	$\frac{\int_0^T \mathbf{e}^{-st}f(t)\,dt}{1-\mathbf{e}^{-sT}}$
35.	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	36.	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
37.	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$			

AC. Le singolarità sono gli zeri di $\sin z$ e gli zeri di $\cos z$, ovvero i punti $k\pi$ ed i punti $\pi/2 + k\pi$. Si tratta di poli semplici, di residuo $(-1)^k$ per la prima famiglia e residuo $(-1)^{k+1}$ per la seconda famiglia.
Il rettangolo in questione include i poli 0 e $\pm\pi/2$, e quindi il risultato dell'integrale è $2\pi i$.
TL. La trasformata dell'equazione è

$$s^3Y - 5 + 2s^2Y + 5sY = 10\frac{s}{s^2+1},$$

da cui si ricava che

$$s(s^2+2s+5)Y = 10\frac{s}{s^2+1} + 5 \quad \Leftrightarrow Y = \frac{10}{(s^2+1)(s^2+2s+5)} + \frac{5}{s(s^2+2s+5)}.$$

Per antitrasformare dobbiamo decomporre la seconda frazione in fratti semplici, e scopriamo che

$$Y = \frac{2-s}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+2s+5} + \frac{-s-2}{s^2+2s+5} + \frac{1}{s} = \frac{2-s}{s^2+1} - \frac{2}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{s}$$

e quindi

$$y = 2\sin t - \cos t - e^{-t}\sin(2t) + 1.$$

MR. 1. I punti rilevanti si ricavano usando il suggerimento. Infatti

$$OA = OP = (a, 0), \quad OC = (0, c), \quad CA = OA - OC = (a, -c) = (R\cos\vartheta, R\sin\vartheta)$$

e quindi

$$OA = OP = (R\cos\vartheta, 0), \qquad OQ = (R\cos\vartheta - 2R, 0), \qquad OC = (0, -R\sin\vartheta)$$

volendo si può anche considerare il centro di massa dell'asta $OG = (R\cos\vartheta - R, 0)$ 2. L'energia potenziale è

$$U = U_g^C + U_g^{PQ} + U_k^Q =$$

$$= mg(-R\sin\vartheta) + \frac{k}{2}(R\cos\vartheta - 2R)^2 \simeq mgR(-\sin\vartheta - 2\alpha\cos\vartheta + \frac{\alpha}{2}\cos^2\vartheta)$$

3. Le condizioni per l'equilibrio sono

$$0 = \partial_\vartheta U = mgR(-\cos\vartheta + 2\alpha\sin\vartheta - \alpha\cos\vartheta\sin\vartheta).$$

Se vogliamo che $\vartheta = \pi/3$ sia un equilibrio deve valere

$$0 = mgR\left(-\frac{1}{2} + 2\alpha\frac{\sqrt{3}}{2} - \alpha\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{mgR}{4}\left(-2 + 3\sqrt{3}\alpha\right).$$

da cui si ricava che $\alpha = 2\sqrt{3}/9$.
4. Nella configurazione di equilibrio si hanno le reazioni vincolari incognite $\vec{\Phi}^C = \varphi^C\vec{\imath}$, $\vec{\Phi}^P = \varphi^P\vec{\jmath}$, $\vec{\Phi}^Q = \varphi^Q\vec{\jmath}$, e devono essere tali che

$$\begin{cases} \varphi^C\vec{\imath} + \varphi^P\vec{\jmath} + \varphi^Q\vec{\jmath} + \vec{F}_k^Q + \vec{F}_g^G + \vec{F}_g^C = \vec{0} \\ QG \times \vec{F}_g^G + QP \times \varphi^P\vec{\jmath} + QC \times \vec{F}_g^C + QC \times \varphi^C\vec{\imath} = \vec{0} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} \varphi^C\vec{\imath} + \varphi^P\vec{\jmath} + \varphi^Q\vec{\jmath} + \frac{3}{2}R\frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{mg}{R}\vec{\imath} - mg\vec{\jmath} - mg\vec{\jmath} = \vec{0} \\ QG \times \vec{F}_g^G + QP \times \varphi^P\vec{\jmath} + QC \times \vec{F}_g^C + QC \times \varphi^C\vec{\imath} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi^C = -\frac{mg}{\sqrt{3}} \\ \varphi^P + \varphi^Q = 2mg \\ R\vec{\imath} \times (-mg\vec{\jmath}) + 2R\vec{\imath} \times \varphi^P\vec{\jmath} + \left(\frac{3}{2}R\vec{\imath} - \sqrt{3}2R\vec{\jmath}\right) \times (-mg\vec{\jmath}) + \left(\frac{3}{2}R\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}R\vec{\jmath}\right) \times \left(-\frac{mg}{\sqrt{3}}\vec{\imath}\right) = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi^C = -\frac{mg}{\sqrt{3}} \\ \varphi^P + \varphi^Q = 2mg \\ -mgR\vec{k} + 2R\varphi^P\vec{k} - mg\frac{3}{2}R\vec{k} - \frac{\sqrt{3}}{2}R\frac{mg}{\sqrt{3}}\vec{k} = \vec{0} \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi^C = -\frac{mg}{\sqrt{3}} \\ \varphi^P + \varphi^Q = 2mg \\ 2\varphi^P = mg + mg\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{mg}{\sqrt{3}} = 3mg \end{cases}$$

Ora possiamo anche cercare di recuperare la reazione vincolare interna che A esercita su P, chiamiamole $\vec{\Phi}_A^P$. Si ha che

$$\varphi^P\vec{\jmath} + \varphi^Q\vec{\jmath} + \vec{F}_k^Q + \vec{F}_g^G + \vec{\Phi}_A^P = \vec{0} \iff \vec{\Phi}_A^P = -2mg\vec{\jmath} - \frac{3}{2}R\frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{mg}{R}\vec{\imath} + mg\vec{\jmath} = -mg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$$

Ovviamente l'opposto della stessa forza si poteva ottenere facilmente poiché

$$\varphi^C\vec{i} - mg\vec{j} + \vec{\Phi}_P^A = \vec{0} \Longrightarrow \vec{\Phi}_P^A = \frac{mg}{\sqrt{3}}\vec{i} + mg\vec{j}$$

5. Per l'energia cinetica si somma quella dell'asta a quella del disco. Per l'asta, non essendoci rotazione, si ha che $T_{PQ} = 1/2mR^2\sin^2\vartheta\dot{\vartheta}^2$, mentre per il disco si usa la formula

$$T_C = \frac{1}{2}m|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2}I_G|\vec{\omega}|^2 = \frac{1}{2}mR^2\cos^2\vartheta\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\dot{\vartheta}^2$$

. La somma diventa $T = \frac{3}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2$.