

Università degli Studi di Catania

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale, A.A. 2022-2023

Compito di Fisica Matematica - 11 Novembre 2023

Non è ammesso l'uso di appunti e dispositivi elettronici. Non è permesso allontanarsi dall'aula prima di avere consegnato il compito. Esibire documento d'identità. Tempo per svolgimento: 2h30m.

Parte A

1. Classificare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{\sin^2 z}$$

e valutare $\oint_C f(z) dz$ dove C è la curva di equazione $|z - i| = 2$.

2. Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^{-t} \sin t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Parte B

Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da una lamina quadrata omogenea, di massa m e lato $\sqrt{2}L$. Il vertice A della lamina è vincolato, tramite un carrello privo di attrito, a scorrere su una guida rettilinea inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo ϕ , con $\tan \phi = 1/2$.

Oltre alla forza peso, il sistema è soggetto a una forza elastica $\mathbf{F} = -\alpha \frac{mg}{L}(B - B') = \alpha \frac{mg}{L} BB'$, applicata al vertice B opposto ad A , con B' proiezione di B su un asse fisso verticale.

Assunto il sistema di riferimento in fi-

gura, in cui la guida risulta essere quindi la retta di equazione $y = x/2$, e detta s l'ordinata di A (quindi A di coordinate $(2s, s)$), ed essendo θ l'angolo formato da $-\hat{j}$ (opposto del versore dell'asse y) e il vettore AB :

- 1) Determinare le coordinate dei punti rilevanti del sistema in funzione delle variabili lagrangiane s, θ .
- 2) Calcolare il potenziale (o l'energia potenziale) totale.
- 3) Trovare le due configurazioni di equilibrio assumendo $\alpha = \sqrt{2}/4$, e disegnare la configurazione per cui $s = 0$.
- 4) Calcolare la reazione vincolare in A nella precedente configurazione.
- 5) Calcolare l'energia cinetica del sistema.

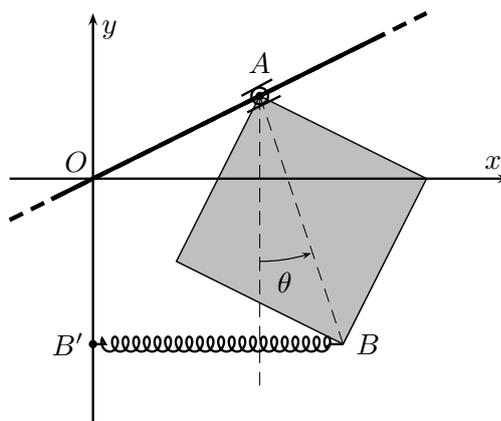


Table of Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. \sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12. $\sin(at) + at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13. $\cos(at) - at \sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14. $\cos(at) + at \sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	16. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
17. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23. $t^n e^{at}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
25. $u_c(t) = u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{e^{-cs}}{s}$	26. $\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	e^{-cs}
27. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	28. $u_c(t)g(t)$	$e^{-cs}\mathcal{L}\{g(t+c)\}$
29. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30. $t^n f(t), n=1,2,3,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31. $\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)du$	32. $\int_0^t f(v)dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	34. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$
35. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	36. $f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
37. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		