Fisica Matematica — L.T. in Ingegneria Industriale

I Appello Fuori Corso — 15 Novembre 2021 (durata 2h 30m)

AC. Usando il teorema dei residui ed i teoremi del grande e piccolo cerchio, si calcoli il valore principale dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2x^3+2x^2+x}dx.$$

TL. Tramite le trasformate di Laplace, e ricordando che per la regola della convoluzione si ha che $\mathcal{L}(f*g)=\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$ (formula 33 della tavola), si risolva l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(t)-\int_0^t \tau\ y(t-\tau)d\tau=\delta(t) \\ y(0)=0 \end{cases}$$

MR. In un sistema di riferimento $O,\vec{i},\vec{j}$ con $\vec{j}$ verticale ascendente, giace un punto P di massa m vincolato a scorrere senza attrito lungo la bisettrice $y=x$, ed una asta AB, di lunghezza ℓ e massa $2m$ il cui estremo B scorre in modo liscio lungo la parabola di equazione $y=-\frac{x^2}{4\ell}$. L'asta è vincolata da un meccanismo a rimanere verticale. Tra P e A vi è una molla di costante elastica $k=mg/\ell$. Si usino come variabili lagrangiane r la coordinata x di P ed s la coordinata x di A (e quindi anche di B):

(a) si scrivano i punti rilevanti del sistema;

(b) si scrivano le energie potenziali del sistema;

(c) si trovino i 3 equilibri del sistema;

(d) si studi la stabilità degli equilibri;

(e) si scriva l'energia cinetica associata ad un atto di moto del sistema.

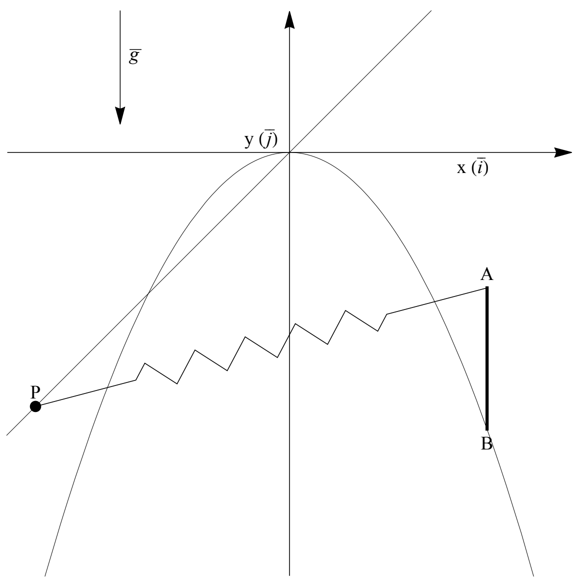

Table of Laplace Transforms

	$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$		$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}$	2.	$\mathbf{e}^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
3.	$t^n,\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4.	t^p, $p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5.	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6.	$t^{n-\frac{1}{2}},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7.	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9.	$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10.	$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11.	$\sin(at)-at\cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12.	$\sin(at)+at\cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13.	$\cos(at)-at\sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14.	$\cos(at)+at\sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15.	$\sin(at+b)$	$\frac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$	16.	$\cos(at+b)$	$\frac{s\cos(b)-a\sin(b)}{s^2+a^2}$
17.	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19.	$\mathbf{e}^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20.	$\mathbf{e}^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21.	$\mathbf{e}^{at}\sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22.	$\mathbf{e}^{at}\cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23.	$t^n\mathbf{e}^{at},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24.	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
25.	$u_c(t)=u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{\mathbf{e}^{-cs}}{s}$	26.	$\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	$\mathbf{e}^{-cs}$
27.	$u_c(t)f(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}F(s)$	28.	$u_c(t)g(t)$	$\mathbf{e}^{-cs}\mathfrak{L}\{g(t+c)\}$
29.	$\mathbf{e}^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30.	$t^n f(t),\quad n=1,2,3,\ldots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31.	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,du$	32.	$\int_0^t f(v)\,dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33.	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	34.	$f(t+T)=f(t)$	$\frac{\int_0^T \mathbf{e}^{-st}f(t)\,dt}{1-\mathbf{e}^{-sT}}$
35.	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	36.	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
37.	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$			

(a) I punti importanti sono:

$$OP = (r, r), \qquad OB = \left(s, -\frac{s^2}{4\ell}\right), \qquad OA = \left(s, -\frac{s^2}{4\ell} + \ell\right)$$

(b) Le energie potenziali sono

$$U_g^P = mgr, \qquad U_g^{AB} = 2mg\left(-\frac{s^2}{4\ell} + \frac{\ell}{2}\right) \simeq -mg\frac{s^2}{2\ell}$$

$$U_k^{AP} = \frac{k}{2}\left((r-s)^2 + \left(r + \frac{s^2}{4\ell} - \ell\right)^2\right) \simeq \frac{k}{2}\left(2r^2 + \frac{1}{2}s^2 - 2rs + \frac{s^4}{16\ell^2} + r\frac{s^2}{2\ell} - 2r\ell\right)$$

Quindi

$$\begin{aligned} U &= \cancel{mgr} - mg\frac{s^2}{2\ell} + \frac{mg}{\ell}r^2 + \frac{mg}{4\ell}s^2 - \frac{mg}{\ell}rs + \frac{mg}{32\ell^3}s^4 + \frac{mg}{4\ell^2}rs^2 \cancel{-mgr} = \\ &= \frac{mg}{\ell}r^2 - \frac{mg}{4\ell}s^2 - \frac{mg}{\ell}rs + \frac{mg}{4\ell^2}rs^2 + \frac{mg}{32\ell^3}s^4 \end{aligned}$$

(c) Le equazioni per l'equilibrio sono

$$\begin{cases} 2\frac{mg}{\ell}r - \frac{mg}{\ell}s + \frac{mg}{4\ell^2}s^2 = 0 \\ -\frac{mg}{2\ell}s - \frac{mg}{\ell}r + \frac{mg}{2\ell^2}rs + \frac{mg}{8\ell^3}s^3 = 0. \end{cases}$$

Dalla prima si ha che $r = s/2 - s^2/(8\ell)$. Sostituendo nella prima si ha che

$$0 = -\frac{mg}{2\ell}s - \frac{mg}{\ell}\left(\frac{s}{2} - \frac{s^2}{8\ell}\right) + \frac{mg}{2\ell^2}\left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{8\ell}\right) + \frac{mg}{8\ell^3}s^3 = \frac{mg}{16\ell}s\left(-16 + 6\frac{s}{\ell} + \frac{s^2}{\ell^2}\right)$$

da cui si ricava che $s = -8\ell, 0, 2\ell$, e di conseguenza $r = -12\ell, 0, \ell/2$.
(d) La matrice Hessiana è

$$HU(r, s) = \frac{mg}{\ell}\begin{pmatrix} 2 & -1 + \frac{s}{2\ell} \\ -1 + \frac{s}{2\ell} & -1 + \frac{r}{2\ell} + \frac{3s^2}{8\ell^2} \end{pmatrix}$$

e si ha che

$$HU(-12\ell, -8\ell) \simeq \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & \frac{35}{2} \end{pmatrix}, \quad HU(0,0) \simeq \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad HU(\ell/2, 2\ell) \simeq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Quindi è stabile, instabile, stabile.
(e) In B si ha sia reazione vincolare come forza applicata che come vincolo puro. Si ha quindi che

...