

## Università degli Studi di Catania

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale, A.A. 2013-2014  
Prova scritta di Fisica Matematica - 18 Novembre 2014

Prof. P. Falsaperla

---

Non è ammessa la consultazione di appunti, tranne tabelle di trasformate e antitrasformate.  
Non è permesso allontanarsi dall'aula prima di avere consegnato il compito. Esibire documento d'identità.  
Svolgimento di una sola delle due Parti: 90 min. Svolgimento intero compito: 180 min.

---

### Parte A

1. Classificare le singolarità al finito di  $f(z) = \frac{\sin(\pi z^2)}{z^2(z-1)^2}$ , e valutare  $\oint_{\gamma} f(z) dz$ ,  
dove  $\gamma$  è la circonferenza di equazione  $|z - i| = \pi/2$  percorsa nel verso positivo.
2. Svolgere uno dei due seguenti esercizi

(a) Calcolare l'antitrasformata di Fourier di  $F(\omega) = \frac{2i}{\omega^2 + 4}$ .

- (b) Calcolare attraverso il teorema dei residui il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} dx$$

3. Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - 2y'' = e^{2t} \\ y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = -1 \end{cases}$$

### Parte B

Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da un disco omogeneo di massa  $4m$  e raggio  $R$ , il cui centro  $C$  è vincolato tramite una cerniera liscia a un punto fisso del piano. Al disco è saldata un'asta omogenea di massa  $3m$  e lunghezza  $2R$  avente un estremo coincidente con  $C$ , inoltre al punto medio  $B$  dell'asta è fissato un punto materiale  $B$  di massa  $m$ . Oltre alla forza peso, sul sistema agiscono due forze elastiche  $\mathbf{F}_1 = -k_1(\mathbf{A} - \mathbf{O})$  e  $\mathbf{F}_2 = -k_2(\mathbf{A} - \mathbf{D})$  applicate all'estremo libero  $A$  dell'asta, dove  $O$  e  $D$  sono due punti fissi sull'asse orizzontale passante per  $C$  posti a distanza  $2R$  da  $C$ . Assunti il sistema di riferimento e la variabile lagrangiana  $\theta$  in figura (quindi  $C = (2R, 0)$ ,  $D = (4R, 0)$ ), e sapendo che  $k_1 = 2\lambda \frac{mg}{R}$ ,  $k_2 = \lambda \frac{mg}{R}$ , con  $\lambda$  costante positiva, determinare:

1) Per quale valore di  $\lambda$  esiste una configurazione di equilibrio con  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , trovare tutte le configurazioni di equilibrio che si hanno per tale  $\lambda$  e studiarne la stabilità.

2) Le reazioni vincolari in  $C$  nelle suddette configurazioni.

*Svolgere uno a piacere dei due seguenti punti, determinare:*

3a) L'energia cinetica totale del sistema e l'equazione di Lagrange del sistema.

3b) La matrice principale e centrale d'inerzia del corpo rigido costituito dal disco, l'asta e il punto materiale.

*Nota: momento d'inerzia di un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $r$  rispetto all'asse ortogonale al piano e passante per il centro,  $I_z = \frac{1}{2}Mr^2$ .*

