

Non è ammesso l'uso di appunti e dispositivi elettronici. Non è permesso allontanarsi dall'aula prima di avere consegnato il compito. Esibire documento d'identità. Tempo per lo svolgimento: 2h30m.

Parte A

1. Elencare le singolarità e determinare l'ordine dei poli della funzione

$$f(z) = \frac{e^{z^2-z} - 1}{z(z^2 - 1)^2}.$$

Valutare l'integrale $\oint_{\gamma} f(z) dz$ dove γ è la curva di equazione $|z - \frac{1}{2}| = 1$.

2. Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' + y = \cos 2t \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Parte B

Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da due aste omogenee AB e CD di lunghezza 2ℓ e massa m . L'asta AB è vincolata nell'estremo A a un asse verticale tramite un pattino che la mantiene orizzontale, l'asta CD è vincolata nell'estremo C a un asse orizzontale tramite un pattino che la mantiene verticale.

Oltre alla forza peso, sul sistema agiscono: una forza elastica applicata a G , punto medio di AB , con legge $F_1 = -k_1(G - O) = k_1 GO$ dove O è il punto di intersezione dei due assi di scorrimento; una molla ideale che collega i punti B e D , con costante elastica k_2 ; una forza costante orizzontale F di intensità γmg applicata ad H , punto medio di CD . Le costanti elastiche valgono $k_1 = \alpha \frac{mg}{\ell}$ e $k_2 = 2 \frac{mg}{\ell}$.

Si scelga il sistema di riferimento in figura, e sia r l'ordinata di A e s l'ascissa di C , quindi $A = (0, r)$ e $C = (s, 0)$. Quindi:

1. Determinare le coordinate dei punti rilevanti del sistema in funzione delle variabili lagrangiane r, s .
2. Calcolare il potenziale (o l'energia potenziale) totale.
3. Determinare la configurazione di equilibrio del sistema in funzione di α e γ , e quindi il valore dei parametri α, γ in modo che la configurazione sia data da $r = \ell, s = 3\ell$.
4. Calcolare forza e momento di reazione vincolare in A nella configurazione di equilibrio.
5. Verificare la stabilità della configurazione di equilibrio. Calcolare l'energia cinetica associata a un atto di moto del sistema.

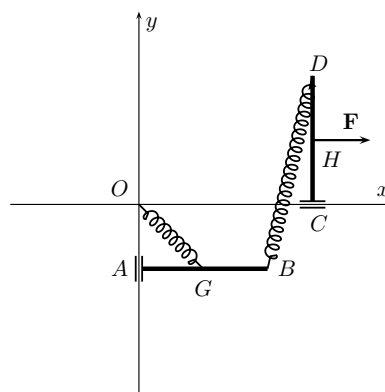


Table of Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, \quad n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. $\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, \quad n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12. $\sin(at) + at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13. $\cos(at) - at \sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14. $\cos(at) + at \sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	16. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
17. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23. $t^n e^{at}, \quad n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
25. $u_c(t) = u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{e^{-cs}}{s}$	26. $\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	e^{-cs}
27. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	28. $u_c(t)g(t)$	$e^{-cs}\mathcal{L}\{g(t+c)\}$
29. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30. $t^n f(t), \quad n=1,2,3,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31. $\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)du$	32. $\int_0^t f(v)dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	34. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$
35. $f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	36. $f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
37. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		

Svolgimento

Parte A

1) Elencare le singolarità e determinare l'ordine dei poli della funzione

$$f(z) = \frac{e^{z^2-z} - 1}{z(z^2 - 1)^2}.$$

Valutare l'integrale $\oint_{\gamma} f(z) dz$ dove γ è la curva di equazione $|z - \frac{1}{2}| = 1$.

Le uniche singolarità sono date dall'annullamento del denominatore, quindi da $z(z^2 - 1)^2 = 0$. Abbiamo la radice semplice $z = 0$ e due radici doppie $z = 1$ e $z = -1$. Si tratta di tre valori reali. Notiamo che per $z = 0$ e $z = 1$ il numeratore si annulla, quindi $z = 0$ sarà una singolarità eliminabile, e $z = 1$ una singolarità di primo ordine o eliminabile. Verifichiamo rapidamente

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2-z} - 1}{z(z^2 - 1)^2} = \frac{1}{1} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2-z} - 1}{z} \stackrel{H}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(2z - 1)e^{z^2-z}}{1} = -1$$

Quindi $z = 0$ è eliminabile. Vediamo se $z = 1$ è un polo del primo ordine

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{e^{z^2-z} - 1}{z(z^2 - 1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^{z^2-z} - 1}{z(z - 1)(z + 1)^2} = \frac{1}{4} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^{z^2-z} - 1}{z - 1} \stackrel{H}{=} \frac{1}{4} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(2z - 1)e^{z^2-z}}{1} = \frac{1}{4}.$$

Il valore trovato sarà anche il residuo di $f(z)$ in $z = 1$. Per $z = -1$ il numeratore non si annulla e il denominatore ha uno zero doppio, quindi sarà un polo del secondo ordine. Non ci sarebbe bisogno di verificare, ma calcoliamo

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z + 1)^2 \frac{e^{z^2-z} - 1}{z(z^2 - 1)^2} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^{z^2-z} - 1}{z(z - 1)^2} = \frac{1 - e^2}{4}.$$

Il punto $z = -1$ è in effetti un polo del secondo ordine. Non è richiesto il calcolo del residuo, lo calcoleremo solo se sarà necessario per l'applicazione del teorema dei residui all'integrale.

La curva γ è una circonferenza di centro $\frac{1}{2}$ e raggio 1, quindi comprende l'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ dell'asse reale e le uniche singolarità interne a γ sono $z = 0$ (eliminabile), e $z = 1$ con residuo già calcolato. Si ha allora, per il teorema dei residui applicato a $f(z)$ e γ ,

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \frac{1}{4} = i \frac{\pi}{2}.$$

2) Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' + y = \cos 2t \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

L'applicazione della trasformata di Laplace non presenta grandi difficoltà. Troviamo

$$\mathcal{L}[y] = Y, \quad \mathcal{L}[y''] = s^2 Y - 1, \quad \mathcal{L}[\cos 2t] = \frac{s}{s^2 + 4}$$

sostituendo e ricavando $Y(s)$ otteniamo

$$s^2 Y - 1 + Y = \frac{s}{s^2 + 4} \quad \rightarrow \quad Y(s^2 + 1) = 1 - \frac{s}{s^2 + 4} \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{s^2 + s + 4}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}.$$

Per antitrasformare procediamo prima a uno sviluppo in fratti semplici del tipo

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 4}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4},$$

dove i coefficienti A, B, C, D si possono ricavare ad esempio sommando le due frazioni e imponendo l'identità del polinomio a numeratore con $s^2 + s + 4$.

Come metodo alternativo, notiamo che il denominatore ha quattro radici semplici (non reali), cioè $s = i, -i, 2i, -2i$, quindi possiamo anche scomporre la funzione come

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 4}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{s^2 + s + 4}{(s - i)(s + i)(s - 2i)(s + 2i)} = \frac{A}{s - i} + \frac{B}{s + i} + \frac{C}{s - 2i} + \frac{D}{s + 2i}.$$

Il calcolo dei coefficienti incogniti è immediato col metodo dei residui, anche perché si tratta di radici immaginarie pure e il calcolo è per questo molto semplificato

$$A = (s - i)Y(s)|_{s=i} = \frac{s^2 + s + 4}{(s + i)(s^2 + 4)} \Big|_{s=i} = \frac{3 + i}{2i \cdot 3} = \frac{1}{6} - \frac{i}{2}$$

$$B = (s + i)Y(s)|_{s=-i} = \frac{s^2 + s + 4}{(s - i)(s^2 + 4)} \Big|_{s=-i} = \frac{3 - i}{-2i \cdot 3} = \frac{1}{6} + \frac{i}{2}.$$

Possiamo notare che A e B sono complessi coniugati, come deve essere in questi casi (funzione reale e residui in poli complessi coniugati). Con un calcolo simile troviamo

$$C = (s - 2i)Y(s)|_{s=2i} = \frac{s^2 + s + 4}{(s^2 + 1)(s + 2i)} \Big|_{s=2i} = \frac{2i}{-3 \cdot 4i} = -\frac{1}{6}$$

$$D = (s + 2i)Y(s)|_{s=-2i} = \frac{s^2 + s + 4}{(s^2 + 1)(s - 2i)} \Big|_{s=-2i} = \frac{-2i}{-3 \cdot -4i} = -\frac{1}{6},$$

due valori reali identici (quindi anche complessi coniugati). Notiamo anche che la somma dei residui è pari a zero, come deve essere in base al limite $\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = 0$.

Prima di procedere all'antitrasformazione conviene sommare i termini relativi alle radici coniugate, che devono produrre delle frazioni reali, cioè

$$\begin{aligned} \frac{A}{s - i} + \frac{B}{s + i} &= \frac{\frac{1}{6} - \frac{i}{2}}{s - i} + \frac{\frac{1}{6} + \frac{i}{2}}{s + i} = \frac{1}{6} \left(\frac{1 - 3i}{s - i} + \frac{1 + 3i}{s + i} \right) = \frac{1}{6} \frac{2s + 6}{s^2 + 1} = \frac{1}{3} \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} \\ \frac{C}{s - 2i} + \frac{D}{s + 2i} &= -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{s - 2i} + \frac{1}{s + 2i} \right) = -\frac{1}{3} \frac{s}{s^2 + 4}. \end{aligned}$$

Complessivamente abbiamo trovato

$$Y(s) = \frac{1}{3} \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{3} \frac{s}{s^2 + 4}.$$

Una via più breve alla scomposizione in fratti semplici si ottiene ricordando la scomposizione

$$\frac{s^2 + s + 4}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = 2\alpha \frac{s}{s^2 + 1} - 2\beta \frac{1}{s^2 + 1} + 2\gamma \frac{s}{s^2 + 4} - 2\delta \frac{2}{s^2 + 4}$$

dove i coefficienti si ricavano da $\alpha + i\beta = \text{Res}(f, i)$ e $\gamma + i\delta = \text{Res}(f, 2i)$. Già abbiamo calcolato $\text{Res}(f, i) = A = \frac{1}{6} - \frac{i}{2}$ e $\text{Res}(f, 2i) = C = -\frac{1}{6}$, quindi si avrebbe (come prima)

$$\alpha = \frac{1}{6}, \beta = -\frac{i}{2}, \gamma = -\frac{1}{6}, \delta = 0 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{3} \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{3} \frac{s}{s^2 + 4}.$$

Antitrasformando ricaviamo la $y(t)$ soluzione del problema

$$y(t) = \frac{1}{3} \cos t + \sin t - \frac{1}{3} \cos 2t.$$

Per una verifica, vediamo subito che $y(0) = 0$, poi si ha

$$y'(t) = -\frac{1}{3} \sin t + \cos t + \frac{2}{3} \sin 2t \quad \rightarrow \quad y'(0) = 1,$$

e per finire

$$y''(t) = -\frac{1}{3} \cos t - \sin t + \frac{4}{3} \cos 2t \quad \rightarrow \quad y'' + y = \cos 2t.$$

Parte B (esercizio non ricopiato)

1) Determinare le coordinate dei punti rilevanti del sistema in funzione delle variabili r, s .

Sappiamo che $OA = (0, r)$ e $OC = (s, 0)$, l'asta AB si mantiene orizzontale, l'asta CD si mantiene verticale ed entrambe hanno lunghezza 2ℓ . Possiamo dire allora che i vettori AB e CD sono dati da $AB = (2\ell, 0)$ e $CD = (0, 2\ell)$ e quindi

$$OB = OA + AB = (0, r) + (2\ell, 0) = (2\ell, r), \quad OD = OC + CD = (s, 0) + (0, 2\ell) = (s, 2\ell).$$

Per la ricerca dei due punti medi notiamo che $AG = (\ell, 0)$ e $CH = (0, \ell)$ e quindi

$$OG = OA + AG = (0, r) + (\ell, 0) = (\ell, r), \quad OH = OC + CH = (s, 0) + (0, \ell) = (s, \ell).$$

Tutti questi risultati sono anche geometricamente ovvi, da una proiezione dei punti cercati sugli assi coordinati.

2) Calcolare il potenziale (o l'energia potenziale) totale.

Sulle due aste agiscono varie forze, tutte conservative, cioè la forza peso, le forze elastiche e una forza costante. Per i potenziali delle due forze peso abbiamo

$$U_G = -mgr, \quad U_H = -mg\ell.$$

Per il potenziale della forza costante F applicata in H ricordiamo che il potenziale di una forza costante f applicata a un punto P è dato da $U = f \cdot P$, quindi

$$U_F = F \cdot OH = (\gamma mg, 0) \cdot (s, \ell) = \gamma mg s.$$

Per le due forze elastiche calcoliamo

$$U_1 = -\frac{1}{2}\alpha \frac{mg}{\ell} GO^2 = -\frac{1}{2}\alpha \frac{mg}{\ell} (\ell^2 + r^2), \quad U_2 = -\frac{mg}{\ell} BD^2 = -\frac{mg}{\ell} ((2\ell - s)^2 + (r - 2\ell)^2),$$

dove possiamo anche non sviluppare i quadrati in U_2 , il calcolo non si semplificherebbe di molto. Complessivamente otteniamo il potenziale

$$U = -mgr - mg\ell + \gamma mg s - \frac{1}{2}\alpha \frac{mg}{\ell} (\ell^2 + r^2) - \frac{mg}{\ell} ((2\ell - s)^2 + (r - 2\ell)^2).$$

3) Determinare la configurazione di equilibrio del sistema in funzione di α e γ , e quindi il valore dei parametri α, γ in modo che la configurazione sia data da $r = \ell, s = 3\ell$.

Cerchiamo le componenti lagrangiane della forza $Q_r = \partial_r U$ e $Q_s = \partial_s U$, e le eguagliamo a zero, ignorando il fattore comune mg

$$\begin{cases} Q_r = -1 - \frac{\alpha}{\ell} r - \frac{2}{\ell} (r - 2\ell) = 0 \\ Q_s = \gamma - \frac{2}{\ell} (s - 2\ell) = 0 \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} -\ell - \alpha r - 2(r - 2\ell) = 3\ell - (\alpha + 2)r = 0 & \rightarrow r = \frac{3}{\alpha + 2}\ell \\ \gamma\ell - 2(s - 2\ell) = (4 + \gamma)\ell - 2s = 0 & \rightarrow s = \frac{4 + \gamma}{2}\ell. \end{cases}$$

Quindi il sistema ha una sola configurazione di equilibrio, data dai valori trovati di r, s , che dipende da α e γ . Se imponiamo che la soluzione sia $r = \ell, s = 3\ell$, troviamo facilmente che deve essere $\alpha = 1$ e $\gamma = 2$.

4) Calcolare forza e momento di reazione vincolare in A nella configurazione di equilibrio.

Imponiamo le equazioni cardinali della statica all'asta AB .

Le forze da bilanciare sono la forza peso, le forze elastiche F_1, F_2 e la reazione vincolare Φ_A in A . Nel calcolo dobbiamo tenere conto dei valori trovati di α, γ e della corrispondente configurazione

di equilibrio $(r, s) = (\ell, 3\ell)$. Calcoliamo i vettori OG e BD nella configurazione di equilibrio che saranno utili nei prossimi calcoli. Essendo $r = \ell, s = 3\ell$ si avrà $OG = (\ell, \ell)$ e $OB = (2\ell, \ell)$, inoltre sarà $OD = (3\ell, 2\ell)$ e quindi $BD = OD - OB = (\ell, \ell)$, potrebbe essere utile anche un disegno della configurazione. Notiamo anche che la forza elastica F_2 agente su B è data da $-2\frac{mg}{\ell}DB$, quindi $2\frac{mg}{\ell}BD$. La forza elastica agente su D , che in questo calcolo non comparirà, sarà invece l'opposta. Scriviamo l'equazione di bilancio

$$F_G + F_1 + F_2 + \Phi_A = 0.$$

Introducendo i versori $\hat{i}$, e $\hat{j}$, rispettivamente degli assi x e y , scriviamo

$$-mg\hat{j} - \frac{mg}{\ell}(\ell\hat{i} + \ell\hat{j}) + 2\frac{mg}{\ell}(\ell\hat{i} + \ell\hat{j}) + \Phi_{Ax}\hat{i} + \Phi_{Ay}\hat{j} = 0,$$

da cui si ricava, separando le componenti lungo i due assi,

$$\Phi_{Ax} = -mg, \quad \Phi_{Ay} = 0, \quad \Phi_A = (-mg, 0),$$

notiamo che Φ_{Ay} deve essere uguale a zero trattandosi di un pattino.

Cerchiamo il momento di reazione vincolare Ψ_A in A bilanciando i momenti delle forze, usiamo come polo l'origine O .

$$OG \times F_G + OG \times F_1 + OB \times F_2 + OA \times \Phi_A + \Psi_A = 0$$

sostituendo si ha

$$(\ell\hat{i} + \ell\hat{j}) \times (-mg\hat{j}) + (\ell\hat{i} + \ell\hat{j}) \times \left(-\frac{mg}{\ell}(\ell\hat{i} + \ell\hat{j})\right) + (2\ell\hat{i} + \ell\hat{j}) \times \left(2\frac{mg}{\ell}(\ell\hat{i} + \ell\hat{j})\right) + \ell\hat{j} \times (-mg\hat{i}) + \Psi_A = 0.$$

Ricordiamo che $\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k}$ e $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = 0$, e in generale $v \times v = 0$, quindi si ha

$$-mg\ell\hat{k} + 0 + 2mg\ell\hat{k} + mg\ell\hat{k} + \Psi_A = 0.$$

e quindi $\Psi_A = -2mg\ell\hat{k}$.

5) Verificare la stabilità della configurazione di equilibrio. Calcolare l'energia cinetica associata a un atto di moto del sistema.

Studiamo l'hessiana del potenziale, a meno del fattore costante e positivo mg , calcolando le derivate seconde. Notiamo che Q_r dipendeva solo da r e anche Q_s solo da s , quindi le derivate miste sono nulle e rimane solo

$$\partial_{rr}U = -\frac{\alpha + 2}{\ell}, \quad \partial_{ss}U = -\frac{2}{\ell}.$$

Questi due valori sono anche gli autovalori dell'hessiana e risultano negativi per $\alpha = 1$, con stabilità della soluzione. Questo era prevedibile in quanto abbiamo un'unica configurazione di equilibrio e il moto del sistema è limitato. La soluzione risulterebbe stabile anche per $-2 < \alpha < 0$ cioè una "molla" repulsiva. La soluzione diventa instabile per $\alpha < -2$, cioè una "molla" fortemente repulsiva.

Calcoliamo l'energia cinetica, che è immediata. Tutte e due le aste si muovono di moto traslatorio con velocità comune a tutti i loro punti. Calcoliamo la velocità dei punti A e C , derivando le rispettive coordinate rispetto al tempo.

$$v_A = \dot{OA} = (0, \dot{r}), \quad v_C = \dot{OC} = (\dot{s}, 0).$$

Le aste sono entrambe di massa m , quindi le due energie cinetiche sono date da

$$T_{AB} = \frac{1}{2}m v_A^2 = \frac{1}{2}m \dot{r}^2, \quad T_{CD} = \frac{1}{2}m v_C^2 = \frac{1}{2}m \dot{s}^2 \quad \rightarrow \quad T = T_{AB} + T_{CD} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{s}^2).$$