



AC. Calcolare, attraverso il teorema dei residui, l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x-\pi)} dx.$$

(Notare che la funzione che stiamo integrando è la parte immaginaria della funzione $\frac{e^{ix}}{x(x-\pi)}$.)

TL. Calcolare la trasformata di Laplace delle due funzioni

$$f(t) = t^2 H(t-2), \quad g(t) = \int_0^t \tau \sin(2\tau) d\tau$$

(Per trasformare $f(t)$ si deve fare qualche passaggio algebrico per prepararsi ad usare la formula 27, oppure si usa direttamente la formula 28. Per trasformare $g(t)$ si usano la formula 32 e la 9).

MR. In un piano in cui si è scelto un sistema di riferimento $(O, \vec{i}, \vec{j})$ con $\vec{j}$ verticale ascendente giace un sistema materiale costituito da un disco omogeneo di centro C , raggio R , massa m , vincolato a rotolare senza strisciare lungo l'asse delle x . Quando il disco ha centro sulla verticale dell'origine, chiamiamo P il suo punto che si trova nelle coordinate $(0, 2R)$. A tale punto è attaccato l'estremo A di un'asta AB di lunghezza ℓ e massa m . L'asta è vincolata a rimanere orizzontale (si veda la prima figura). Il disco può quindi rotolare. Ad un avanzamento del disco corrisponde una sua rotazione in verso orario (si vedano le altre figure).

Al punto B dell'asta è attaccata una molla di costante elastica $k = mg/R$ il cui altro estremo è attaccato al punto B' , proiezione di B sulla retta orizzontale $y = \frac{3}{2}R$. Sul sistema agisce la gravità.

Si scelga come coordinata lagrangiana la coordinata s del punto di contatto tra il disco e l'asse delle x .

1. Si scriva prima OC , e si dimostri quindi che

$$OA = (s + R \sin(s/R))\vec{i} + (R + R \cos(s/R))\vec{j}$$

i punti B, B' e G (centro di massa dell'asta AB) sono facilmente determinabili.

2. Si calcoli il potenziale o l'energia potenziale totale del sistema.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio.
4. Si studi la stabilità della configurazione di equilibrio con $s = 0$ e $s = \pi R$.
5. Si calcolino le reazioni vincolari che il disco esercita sul punto A dell'asta nella configurazione di equilibrio con $s = \frac{2}{3}\pi R$.

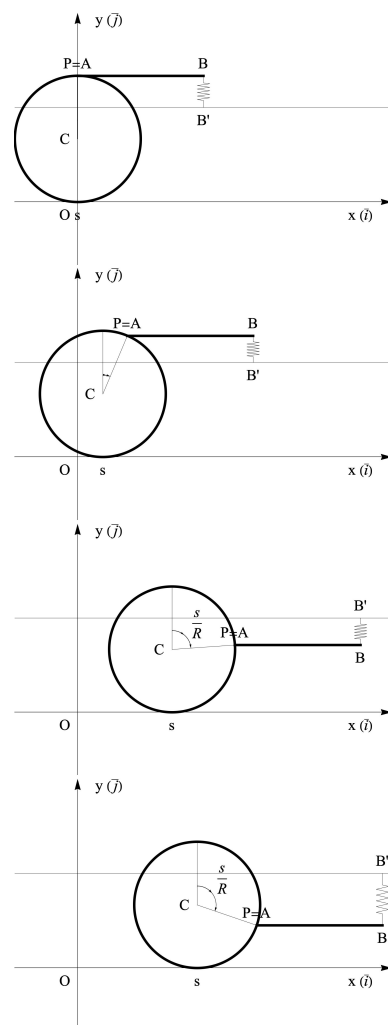


Table of Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. $\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12. $\sin(at) + at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13. $\cos(at) - at \sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14. $\cos(at) + at \sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	16. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
17. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23. $t^n e^{at}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
25. $u_c(t) = u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{e^{-cs}}{s}$	26. $\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	e^{-cs}
27. $u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$	28. $u_c(t) g(t)$	$e^{-cs} \mathcal{L}\{g(t+c)\}$
29. $e^{ct} f(t)$	$F(s-c)$	30. $t^n f(t), n=1,2,3,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31. $\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(u) du$	32. $\int_0^t f(v) dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33. $\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$	$F(s) G(s)$	34. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1-e^{-sT}}$
35. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	36. $f''(t)$	$s^2 F(s) - sf'(0) - f''(0)$
37. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		

AC. La funzione f suggerita avrà integrale sulla retta reale che vale $J + iI$, dove I è il valore cercato. La funzione f ha due poli semplici in $0, \pi$, ed il residuo nei poli è

$$\operatorname{res}(f, 0) = -\frac{1}{\pi}, \quad \operatorname{res}(f, \pi) = -\frac{1}{\pi}$$

Si deve scegliere un cammino con un grande cerchio (EA) e due piccoli cerchi (BC e DE) attorno a 0 e π . Non ci sono altri poli, quindi non ci saranno residui interni al cammino. Si ha quindi che

$$0 = \int_{ABCDEA} f(z) dz = (J + iI) + \int_{BC} f(z) dz + \int_{DE} f(z) dz + \int_{EA} f(z) dz = I - \pi i \left(-\frac{1}{\pi}\right) - \pi i \left(-\frac{1}{\pi}\right) + 0 = I - 2i.$$

Il teorema del grande cerchio dice che il contributo sarà zero (la funzione e^{iz} è limitata, il denominatore cresce come z^2 , quindi anche moltiplicata per z la funzione tende a zero). Calcolare, attraverso il teorema dei residui, l'integrale

Quindi $I = 2$.

TL. La cosa più conveniente è usare la formula 28. Si ha che

$$\mathcal{L}(t^2 H(t-2)) = e^{-2s} \mathcal{L}((t+2)^2) = e^{-2s} \mathcal{L}(t^2 + 4t + 4) = e^{-2s} \left(\frac{2}{s^3} + 4 \frac{1}{s^2} + 4 \frac{1}{s} \right)$$

Altrimenti si può usare la formula 27 scrivendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^2 H(t-2)) &= \mathcal{L}(((t-2)+2)^2 H(t-2)) = \mathcal{L}((t-2)^2 H(t-2) + 4(t-2)H(t-2) + 4H(t-2)) = \\ &= e^{-2s} \frac{2}{s^3} + 4e^{-2s} \frac{1}{s^2} + 4e^{-2s} \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Molto più tortuoso, si può usare il fatto che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^2 H(t-2)) &= \mathcal{L}(H(t-2))'' = \left(\frac{e^{-2s}}{s} \right)'' = \left(\frac{-2e^{-2s}s - e^{-2s}}{s^2} \right)' = \\ &= \frac{(4e^{-2s}s - 2e^{-2s} + 2e^{-2s})s^2 - (-2e^{-2s}s - e^{-2s})2s}{s^4} = e^{-2s} \frac{4s^3 + 4s^2 + 2s}{s^4}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la seconda trasformata, si ha

$$\mathcal{L} \left(\int_0^t \tau \sin(2\tau) d\tau \right) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(\tau \sin(2\tau)) = \frac{1}{s} \frac{4s}{(s^2 + 4)^2} = \frac{4}{(s^2 + 4)^2}$$

MR.

1. Le posizioni dei punti notevoli sono: $OC = (s, R)$, $OA = OC + CA$ e CA si ottiene considerando il vettore $(0, 1)$ ruotato in verso orario dell'angolo s/R , e porge la coppia seno-coseno suggerita.

Il punto B si ottiene traslando a destra di ℓ , e quindi $OB = (s + R \sin(s/R) + \ell, R + R \cos(s/R))$, ed infine $OB' = (s + R \sin(s/R) + \ell, 3R/2)$ (stessa x ed y vincolata alla retta orizzontale data).

Il centro di massa dell'asta ha stessa coordinata y di qualsiasi punto dell'asta, e questo è quello che ci serve sapere per l'energia potenziale, ma per l'ultimo punto ci servirà conoscere la sua posizione esatta, che è

$$OG = \left(s + R \sin(s/R) + \frac{\ell}{2}, R + R \cos(s/R) \right)$$

2. Si ha che

$$\begin{aligned} U &= mgR + mg(R + R \cos(s/R)) + \frac{1}{2} \frac{mg}{R} \left(R + R \cos(s/R) - \frac{3}{2}R \right) \simeq \\ &\simeq mgR \cos\left(\frac{s}{R}\right) + \frac{1}{2} mgR \left(\frac{1}{4} - \cos\left(\frac{s}{R}\right) + \cos^2\left(\frac{s}{R}\right) \right) \simeq \frac{mgR}{2} \left(\cos\left(\frac{s}{R}\right) + 2 \cos^2\left(\frac{s}{R}\right) \right) \end{aligned}$$

3. Gli equilibri si trovano annullando la derivata, a meno del fattore positivo $mg/2$ si ha

$$U' = -\sin\left(\frac{s}{R}\right) - 2 \cos\left(\frac{s}{R}\right) \sin\left(\frac{s}{R}\right) = -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \left(1 + 2 \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right)$$

Si ha quindi che o $\sin(s/R) = 0$, ovvero $s = k\pi R$ (essenzialmente le soluzioni sono $s = 0, \pi R$, il resto sono ripetizioni traslate di queste, oppure $\cos(s/R) = -1/2$, ovvero $s = \pm 2\pi R/3 + 2k\pi$ (anche in questo caso sostanzialmente due soluzioni).

4. Facciamo una ulteriore derivata ed otteniamo (a meno del fattore $1/R$)

$$U'' = -\cos\left(\frac{s}{R}\right) + 2\sin^2\left(\frac{s}{R}\right) - 2\cos^2\left(\frac{s}{R}\right).$$

In $s = 0$ si ha che $U''(0) = -3$, mentre in $s = \pi R$ si ha che $U''(\pi R) = -1$, entrambi sono negativi, e quindi gli equilibri sono instabili

5. Bilanciamo le forze, si ha che

$$\vec{\Phi}_A - mg\vec{j} + \left(\frac{mg}{R}\right)(R\vec{j}) = 0 \text{ quindi } \vec{\Phi} = 0$$

Bilanciamo i momenti, si ha che

$$\vec{\Psi}_A + AG \times (-mg\vec{j}) + AB \times mg\vec{j} \text{ quindi } \vec{\Psi}_A = -\frac{\ell}{2}mg\vec{k}$$