Università degli Studi di Catania, A.A. 2025-2026

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale

Compito di Fisica Matematica - 3 Febbraio 2026

Non è ammesso l'uso di appunti e dispositivi elettronici. Non è permesso allontanarsi dall'aula prima di avere consegnato il compito. Esibire documento d'identità. Tempo per lo svolgimento: 2h30m.

Parte A

1. Calcolare attraverso il teorema dei residui il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$$

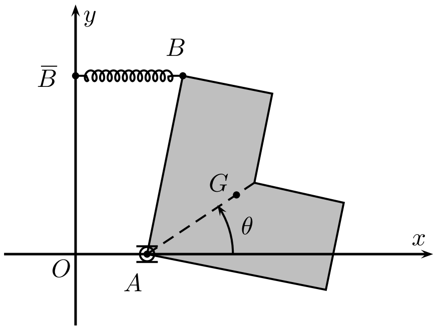
2. Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y = H(t-1)\,(t-1)\,e^{-(t-1)} \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Notare che al secondo membro è presente la funzione te^{-t} traslata in avanti di 1.

Parte B

Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da una lamina omogenea di massa $3m$, costituita dall'unione di tre quadrati uguali come da figura, ciascuno di lato $\sqrt{2}\,\ell$. Il vertice A è vincolato tramite un carrello a un asse orizzontale, e sul punto B agisce una molla di costante elastica k che collega B alla sua proiezione $\overline{B}$ su un asse verticale.



Il centro di massa G della lamina si trova sull'asse di simmetria della lamina, ed è possibile calcolare che $|AG| = \frac{5}{3}\ell$.

Si scelga il sistema di riferimento in figura, e si indichi con ϑ l'angolo formato dal vettore $\hat{\imath}$ (versore dell'asse x) e il vettore AG, e sia s l'ascissa di A, cioè $OA = (s, 0)$. Quindi:

1. Determinare le coordinate dei punti rilevanti del sistema in funzione delle variabili lagrangiane ϑ, s.
2. Calcolare il potenziale (o l'energia potenziale) totale.
3. Determinare le due configurazioni di equilibrio e rappresentarle.
4. Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio.
5. Determinare il baricentro della lamina, verificando che $|AG| = \frac{5}{3}\ell$.

Table of Laplace Transforms

	$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$		$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}$	2.	$\mathbf{e}^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
3.	$t^n,\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4.	$t^p, p>-1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5.	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6.	$t^{n-\frac{1}{2}},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7.	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9.	$t\sin(at)$	$\frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	10.	$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
11.	$\sin(at)-at\cos(at)$	$\frac{2a^3}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	12.	$\sin(at)+at\cos(at)$	$\frac{2as^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
13.	$\cos(at)-at\sin(at)$	$\frac{s\left(s^2-a^2\right)}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	14.	$\cos(at)+at\sin(at)$	$\frac{s\left(s^2+3a^2\right)}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
15.	$\sin(at+b)$	$\frac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$	16.	$\cos(at+b)$	$\frac{s\cos(b)-a\sin(b)}{s^2+a^2}$
17.	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19.	$\mathbf{e}^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20.	$\mathbf{e}^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21.	$\mathbf{e}^{at}\sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22.	$\mathbf{e}^{at}\cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23.	$t^n\mathbf{e}^{at},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24.	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
25.	$u_c(t)=u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{\mathbf{e}^{-cs}}{s}$	26.	$\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	$\mathbf{e}^{-cs}$
27.	$u_c(t)f(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}F(s)$	28.	$u_c(t)g(t)$	$\mathbf{e}^{-cs}\mathfrak{L}\{g(t+c)\}$
29.	$\mathbf{e}^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30.	$t^n f(t),\quad n=1,2,3,\ldots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31.	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,du$	32.	$\int_0^t f(v)\,dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33.	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	34.	$f(t+T)=f(t)$	$\frac{\int_0^T \mathbf{e}^{-st}f(t)\,dt}{1-\mathbf{e}^{-sT}}$
35.	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	36.	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
37.	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$			

Svolgimento

1) Calcolare attraverso il teorema dei residui il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} dx$$

Si tratta dell'integrale di una funzione reale sull'asse reale, è possibile sfruttare il teorema dei residui, tenendo conto anche del lemma del grande cerchio che in questo caso risulta applicabile in quanto la funzione integranda, estesa al campo complesso, soddisfa la condizione

$$\lim_{z\to\infty} z\,\frac{z^2+5z+4}{z^4+5z^2+4} = 0.$$

L'integrale risulterà uguale a $2\pi i$ per la somma dei residui della funzione nel semipiano complesso superiore. Le singolarità della funzione sono dovute solo all'annullamento del denominatore quindi occorre risolvere l'equazione $z^4+5z^2+4=0$. Si tratta di un'equazione polinomiale di quarto grado, e notiamo che si tratta di una equazione *biquadratica* cioè contenente solo potenze pari di z. Possiamo porre $z^2=t$ e risolvere la corrispondente equazione di secondo grado

$$t^2+5t+4=0 \quad\to\quad t=-1, t=-4, \quad \text{ovvero} \quad t^2+5t+4=(t+1)(t+4).$$

Per la variabile z quindi troviamo $z^2=-1$ e $z^2=-4$, cioè $z=\pm i$ e $z=\pm 2i$, quattro radici complesse distinte, e quindi quattro poli semplici, dei quali solo $i, 2i$ nel semipiano superiore. Notiamo che possiamo riscrivere la funzione integranda come

$$f(z) = \frac{(z+1)(z+4)}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{(z+1)(z+4)}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)},$$

i residui sono dati da

$$\text{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{(z+1)(z+4)}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)} = \lim_{z\to i}\frac{(z+1)(z+4)}{(z+i)(z+2i)(z-2i)} =$$

$$= \frac{(i+1)(i+4)}{(i+i)(i+2i)(i-2i)} = \frac{3+5i}{6i} = \frac{5}{6} - \frac{i}{2}$$

$$\text{Res}(f,2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{(z+1)(z+4)}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)} = \lim_{z\to 2i}\frac{(z+1)(z+4)}{(z+i)(z-i)(z+2i)} =$$

$$= \frac{(2i+1)(2i+4)}{(2i+i)(2i-i)(2i+2i)} = \frac{10i}{-12i} = -\frac{5}{6},$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} dx = 2\pi i \left(\frac{5}{6} - \frac{i}{2} - \frac{5}{6}\right) = \pi.$$

2) Tramite le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y = H(t-1)\,(t-1)\,e^{-(t-1)} \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Notare che al secondo membro è presente la funzione te^{-t} traslata in avanti di 1.

La principale difficoltà dell'esercizio può essere considerata la trasformata del secondo membro, ma considerando il suggerimento e la tabella delle trasformate allegata, vediamo che possiamo applicare la formula 27. che possiamo riscrivere, per utilizzare la notazione dell'esercizio, anche come

$$\mathcal{L}[H(t-c)f(t-c)] = e^{-cs}F(s).$$

Ricordiamo che $F(s)$ indica la trasformata della funzione $f(t)$, che nel nostro caso è $f(t) = te^{-t}$, e il parametro c vale nel nostro caso 1. Ricaviamo allora, sempre dalla tabella, la trasformata di te^{-t}, che dalla formula 23., per $n = 1, a = -1$, risulta

$$\mathcal{L}[te^{-t}] = \frac{1}{(s+1)^2},$$

e quindi

$$\mathcal{L}[H(t-1)\,(t-1)\,e^{-(t-1)}] = e^{-s}\mathcal{L}[te^{-t}] = e^{-s}\frac{1}{(s+1)^2}.$$

Tenendo conto dei dati iniziali pari a zero, la trasformata dell'equazione risulta

$$s^2Y - Y = e^{-s}\frac{1}{(s+1)^2}, \quad \rightarrow \quad Y(s) = e^{-s}\frac{1}{(s^2-1)(s+1)^2} = e^{-s}\frac{1}{(s-1)(s+1)^3}.$$

Per antitrasformare, sempre attraverso la formula 27., dobbiamo trovare l'antitrasformata della funzione razionale a fattore di e^{-s} che sviluppiamo in fratti semplici

$$Y_1(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)^3} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+1)^3}.$$

Possiamo utilizzare l'identità dei polinomi, sviluppando la somma di frazioni a secondo membro ed eguagliando i numeratori.

Proviamo anche alcuni procedimenti alternativi, che possono risultare a volte più semplici. Notiamo intanto che possiamo ricavare A come residuo della funzione in 1 (equivalente a moltiplicare primo e secondo membro dell'uguaglianza per $s-1$ e porre $s=1$) come

$$A = \left.\frac{1}{(s+1)^3}\right|_{s=1} = \frac{1}{8},$$

possiamo ricavare D con tecnica analoga, moltiplicando ambo i membri per $(s+1)^3$ e ponendo $s = -1$,

$$D = \left.\frac{1}{s-1}\right|_{s=-1} = -\frac{1}{2},$$

possiamo poi imporre l'eguaglianza tra primo e secondo membro per valori fissati di s (tranne le radici $s = 1$, $s = -1$), ad esempio $s = 0$, ricavando

$$\frac{1}{(0-1)(0+1)^3} = \frac{1}{8}\frac{1}{0-1} + \frac{B}{0+1} + \frac{C}{(0+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(0+1)^3} \rightarrow -1 = -\frac{1}{8} + B + C - \frac{1}{2},$$

da cui

$$B + C = -\frac{3}{8}.$$

Per ricavare un'altra relazione ricordiamo che il $\lim_{s\to\infty} sY_1(s)$ ci darà la somme dei residui della funzione e che i residui della funzione Y_1 in $s = 1$ e $s = -1$ sono dati rispettivamente da A e B. Quindi

$$\lim_{s\to\infty} s\,Y_1(s) = 0, \quad \rightarrow \quad A + B = 0 \quad \rightarrow \quad B = -\frac{1}{8} \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{1}{4}.$$

Alla fine abbiamo

$$Y_1(s) = \frac{1}{8}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^3}.$$

Dalla tabella (formula 23.) possiamo ricavare l'antitrasformata $y_1(t)$ della $Y_1(s)$

$$y_1(t) = \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t} - \frac{1}{4}t^2e^{-t},$$

Sarà quindi (dalla 27.) $y(t) = H(t-1)y_1(t-1)$, esplicitamente

$$y(t) = \frac{1}{8}H(t-1)\left(e^{t-1} - e^{-(t-1)}(1 + 2(t-1) + 2(t-1)^2)\right).$$

Parte B (esercizio non ricopiato)

1. I punti su cui sono applicate delle forze sono il baricento G e il punto B, servirà anche il punto $\overline{B}$. Conosciamo la lunghezza del segmento AG pari a $\frac{5}{3}\ell$, inoltre AG forma un angolo ϑ con l'asse x, possiamo allora ricavare

$$AG = \frac{5}{3}\ell\,(\cos\vartheta, \sin\vartheta) \quad \to \quad OG = OA + AG = (s + \frac{5}{3}\ell\cos\vartheta, \frac{5}{3}\ell\sin\vartheta).$$

Per determinare il punto B, osserviamo che il vettore AB forma con l'asse x un angolo di $\vartheta + \pi/4$, infatti per simmetria il segmento AG divide l'angolo retto in A in due parti uguali, quindi l'angolo $G\hat{A}B = \pi/4$. Notiamo anche che il segmento AB ha lunghezza $2\sqrt{2}\ell$ essendo costituito da due lati di quadrati di lunghezza $\sqrt{2}\ell$ data nel testo. Abbiamo allora

$$AB = 2\sqrt{2}\ell\ (\cos(\vartheta + \pi/4), \sin(\vartheta + \pi/4))$$

e quindi

$$OB = OA + AB = (s + 2\sqrt{2}\ell\cos(\vartheta + \pi/4), 2\sqrt{2}\ell\sin(\vartheta + \pi/4)).$$

Sarebbe possibile (in questo caso) svolgere l'intero compito anche senza sviluppare le due espressioni trigonometriche attraverso le formule di addizione di seno e coseno, ma lo sviluppo produce delle espressioni più semplici. Ricaviamo

$$OB = \big(s + 2\sqrt{2}\ell(\cos\vartheta\cos\pi/4 - \sin\vartheta\sin\pi/4),\ 2\sqrt{2}\ell(\sin\vartheta\cos\pi/4 + \cos\vartheta\sin\pi/4)\big),$$

e quindi essendo $\cos\pi/4 = \sin\pi/4 = \sqrt{2}/2$,

$$OB = \big(s + 2\ell(\cos\vartheta - \sin\vartheta),\ 2\ell(\sin\vartheta + \cos\vartheta)\big),$$

Si ha anche banalmente

$$O\overline{B} = \big(0,\ 2\ell(\sin\vartheta + \cos\vartheta)\big).$$

2. Il potenziale della forza peso sarà dato da

$$U_G = -3\,m\,g\,y_G = -5\,mg\ell\,\sin\vartheta.$$

Il potenziale della forza elastica risulta

$$U_{el} = -\frac{1}{2}k|B\overline{B}|^2 = -\frac{1}{2}k\big(s + 2\ell(\cos\vartheta - \sin\vartheta)\big)^2,$$

con potenziale totale

$$U = -5\,mg\ell\,\sin\vartheta - \frac{1}{2}k\big(s + 2\ell(\cos\vartheta - \sin\vartheta)\big)^2.$$

Non è conveniente sviluppare il quadrato che risulterebbe in un'espressione molto più lunga.

3. Per determinare le configurazioni di equilibrio eguagliamo a zero le componenti lagrangiane della forza, date dalle derivate parziali di U rispetto alle variabili lagrangiane

$$\begin{cases} Q_s = \partial_s U = -k\big(s + 2\ell(\cos\vartheta - \sin\vartheta)\big) = 0 \\ Q_\vartheta = \partial_\vartheta U = -5\,mg\ell\,\cos\vartheta - k\big(s + 2\ell(\cos\vartheta - \sin\vartheta)\big)2\ell(-\sin\vartheta - \cos\vartheta) = 0. \end{cases}$$

Notiamo che la prima equazione ci assicura che il secondo termine della seconda equazione è uguale a zero, o potremmo anche ricavare s dalla prima equazione e sostituire nella seconda, ottenendo comunque

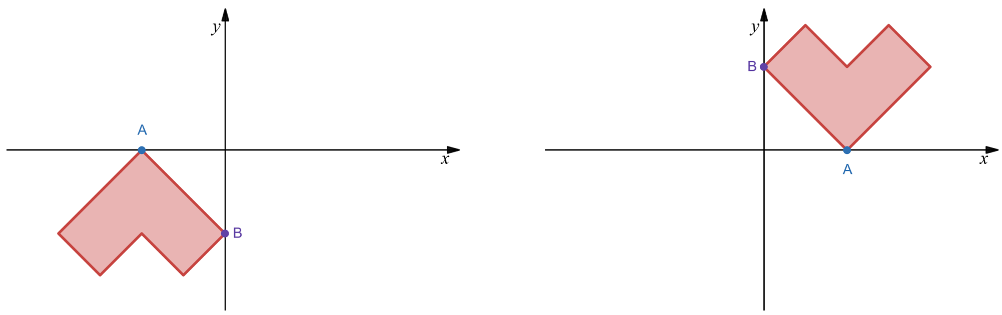
$$-5\,mg\ell\,\cos\vartheta = 0 \quad \rightarrow \quad \cos\vartheta = 0 \quad \rightarrow \quad \vartheta = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Sostituendo ϑ nella prima equazione possiamo ricavare i due corrispondenti valori di s

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad s + 2\ell(0-1) = 0 \quad \rightarrow \quad s = 2\ell$$

$$\vartheta = -\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad s + 2\ell(0+1) = 0 \quad \rightarrow \quad s = -2\ell.$$

Per rappresentare le due configurazioni è importante notare che la prima equazione implica che l'ascissa di B è pari a zero in tutte e due le configurazioni, quindi $B \equiv \overline{B}$.



A sinistra la configurazione $s = -2\ell, \vartheta = -\pi/2$, a destra $s = 2\ell, \vartheta = \pi/2$.

4. Per studiare la stabilità ricorriamo alla matrice Hessiana H del potenziale, contenente tutte le derivate seconde della U. Dalla $Q_s = \partial_s U$ possiamo ricavare $\partial_{ss}U$ e $\partial_{s\vartheta}U = \partial_{\vartheta s}U$.

$$\partial_{ss}U = \partial_s Q_s = -k \qquad (\text{con } k \text{ costante positiva})$$

$$\partial_{s\vartheta}U = \partial_\vartheta Q_s = 2k\ell(\sin\vartheta + \cos\vartheta).$$

Riscriviamo ora la Q_ϑ più esplicitamente

$$Q_\vartheta = \partial_\vartheta U = -5\,mg\ell\,\cos\vartheta + 2k\ell\big(s(\sin\vartheta + \cos\vartheta) + 2\ell(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\big).$$

Quindi

$$\partial_{\vartheta\vartheta}U = 5\,mg\ell\,\sin\vartheta + 2k\ell\big(s(\cos\vartheta - \sin\vartheta) - 8\ell\sin\vartheta\cos\vartheta\big).$$

Per $\vartheta = \pi/2$, $s = 2\ell$ si ha

$$\partial_{s\vartheta}U = 2k\ell, \qquad \partial_{\vartheta\vartheta}U = 5mg\ell + 2k\ell(-2\ell) = 5mg\ell - 4k\ell^2.$$

Per $\vartheta = -\pi/2$, $s = -2\ell$ si ha

$$\partial_{s\vartheta}U = -2k\ell, \qquad \partial_{\vartheta\vartheta}U = -5mg\ell + 2k\ell(-2\ell) = -5mg\ell - 4k\ell^2.$$

Vediamo che $\partial_{ss}U < 0$ in ogni caso, per verificare la stabilità dobbiamo aggiungere la condizione che il determinante della matrice sia maggiore di zero, dove il determinante sarà dato da

$$\mathrm{Det}(H) = \partial_{ss}U\,\partial_{\vartheta\vartheta}U - (\partial_{s\vartheta}U)^2$$

Per $\vartheta = \pi/2$, $s = 2\ell$ si ha

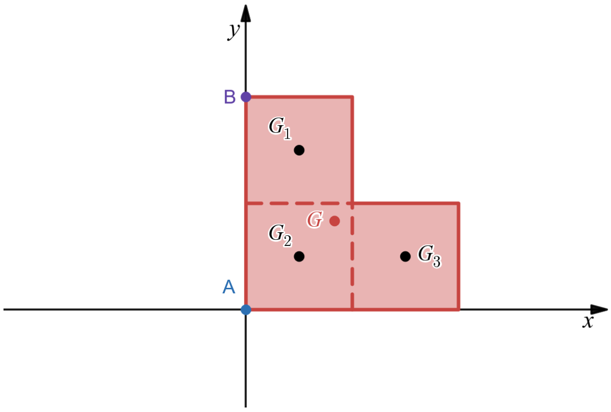
$$\mathrm{Det}(H) = -k(5mg\ell - 4k\ell^2) - 4k^2\ell^2 = -5kmg\ell < 0,$$

in quanto k, m, g, ℓ sono tutte quantità positive. Quindi otteniamo *instabilità*.
Per $\vartheta = -\pi/2$, $s = -2\ell$ si ha

$$\mathrm{Det}(H) = -k(-5mg\ell - 4k\ell^2) - 4k^2\ell^2 = 5kmg\ell > 0,$$

Quindi otteniamo *stabilità*.

5. Per trovare le coordinate del centro di massa della lamina è opportuno utilizzare un sistema di riferimento che semplifichi i conti, possiamo ad esempio considerare un riferimento cartesiano in cui A si trovi nell'origine e B sull'asse y, quindi con coordinate $B = (0, 2\sqrt{2}\ell)$.



In questo caso i centri di massa dei tre quadrati (ognuno di massa m) saranno facilmente determinabili, in figura $G_1 = (\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\ell, \frac{3}{2}\sqrt{2}\,\ell)$, $G_2 = (\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\ell, \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\ell)$, $G_3 = (\frac{3}{2}\sqrt{2}\,\ell, \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\ell)$ e le coordinate di G si potranno ricavare con la legge di composizione dei centri di massa (o anche con una composizione sottrattiva considerando un quadrato di lato $2\sqrt{2}\ell$ e massa $4m$ da cui è stato asportato un quadrato di lato $\sqrt{2}\ell$ e massa m)

$$x_G = \frac{1}{3m}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\ell\, m + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\ell\, m + \frac{3}{2}\sqrt{2}\,\ell\, m\right) = \frac{5}{6}\sqrt{2}\,\ell$$

per simmetria si ha anche $y_G = x_G$ e quindi

$$G = \left(\frac{5}{6}\sqrt{2}\,\ell, \frac{5}{6}\sqrt{2}\,\ell\right), \quad \to \quad |AG| = |OG| = \sqrt{x_G^2 + y_G^2} = \frac{5}{3}\,\ell.$$