Fisica Matematica	————	L.T. in Ingegneria Industriale
II Appello Recupero	A.A. 2024–25	18 aprile 2025 (2h 30m)

AC. Usando il teorema dei residui, si calcoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x+4}{(x^2+4x+5)(x-3)}dx.$$

TL. Si trasformi l'equazione differenziale

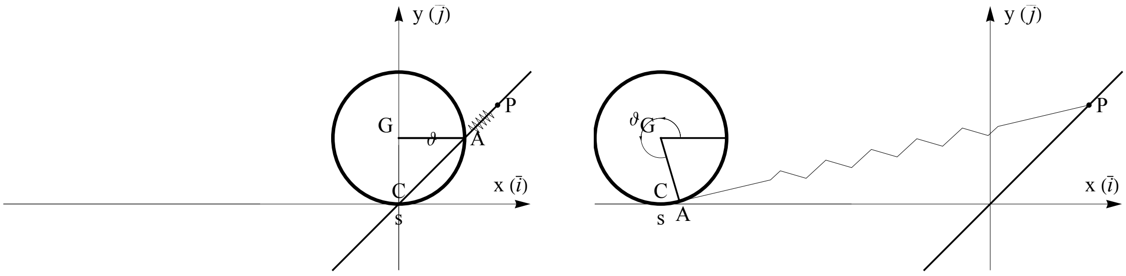
$$\begin{cases} y''' + y = e^{-t} \\ y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3 \end{cases}$$

Una volta calcolato $Y(s)$, si calcoli il valore dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} ty(t)dt$$

Si ricordi che quell'integrale è $\mathcal{L}(ty(t))(0)$, e che $\mathcal{L}(ty(t))$ si esprime facilmente conoscendo $\mathcal{L}(y(t))$.

MR. In un piano verticale, in cui è stato scelto un sistema di riferimento inerziale $(O, \vec{i}, \vec{j})$, giace una rotaia orizzontale, coincidente con l'asse delle x. Su tale rotaia è poggiato un disco di raggio R, massa m, e centro G. Il disco può rotolare senza strisciare sulla rotaia. Denotiamo con C il punto di contatto tra il disco e la rotaia, e denotiamo con A un punto del bordo del disco in cui è fissata una molla di costante elastica k. L'altro estremo della molla è fissato ad un punto materiale P di massa M vincolato a muoversi lungo la retta $y = x$. Il punto A è tale che, quando il suo punto di contatto C tra il disco e la rotaia coincide con O, allora GA è parallelo a $\vec{i}$ (si veda la figura di sinistra).



Si usino come coordinate Lagrangiane ϑ l'angolo orientato tra GA e $\vec{i}$ ed r la coordinata x di OP.

1. Ricordando che quando il disco di centro G ruota di un angolo ϑ allora la coordinata x di OC diventa $s = -R\vartheta$, si scrivano le coordinate di C, G, A e di P.

2. Si calcoli il potenziale o l'energia potenziale totale del sistema.

3. Si determini quanto vale la costante elastica k della molla affinché $\vartheta = \pi/2$ sia una configurazione di equilibrio.

4. Quando $\vartheta = 0$ si hanno invece infinite soluzioni. Determinarle e giustificare la loro esistenza.

5. Si disegni il sistema ai due equilibri sopra, e si rappresentino le forze attive e le reazioni vincolari ricordando che il vincolo di puro rotolamento corrisponde to una reazione vincolare in C generica ed una risultate torcente in C nulla.

Table of Laplace Transforms

	$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$		$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\dfrac{1}{s}$	2.	$\mathbf{e}^{at}$	$\dfrac{1}{s-a}$
3.	$t^n,\quad n=1,2,3,\ldots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	4.	t^p, $p > -1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5.	$\sqrt{t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6.	$t^{n-\frac{1}{2}},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7.	$\sin(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	8.	$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
9.	$t\sin(at)$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10.	$t\cos(at)$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11.	$\sin(at)-at\cos(at)$	$\dfrac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12.	$\sin(at)+at\cos(at)$	$\dfrac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13.	$\cos(at)-at\sin(at)$	$\dfrac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14.	$\cos(at)+at\sin(at)$	$\dfrac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15.	$\sin(at+b)$	$\dfrac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$	16.	$\cos(at+b)$	$\dfrac{s\cos(b)-a\sin(b)}{s^2+a^2}$
17.	$\sinh(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	18.	$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
19.	$\mathbf{e}^{at}\sin(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20.	$\mathbf{e}^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21.	$\mathbf{e}^{at}\sinh(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22.	$\mathbf{e}^{at}\cosh(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23.	$t^n\mathbf{e}^{at},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24.	$f(ct)$	$\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right)$
25.	$u_c(t)=u(t-c)$ Heaviside Function	$\dfrac{\mathbf{e}^{-cs}}{s}$	26.	$\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	$\mathbf{e}^{-cs}$
27.	$u_c(t)f(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}F(s)$	28.	$u_c(t)g(t)$	$\mathbf{e}^{-cs}\mathfrak{L}\{g(t+c)\}$
29.	$\mathbf{e}^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30.	$t^n f(t),\quad n=1,2,3,\ldots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31.	$\dfrac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,du$	32.	$\int_0^t f(v)\,dv$	$\dfrac{F(s)}{s}$
33.	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	34.	$f(t+T)=f(t)$	$\dfrac{\int_0^T \mathbf{e}^{-st}f(t)\,dt}{1-\mathbf{e}^{-sT}}$
35.	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	36.	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
37.	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$			

AC Il denominatore è il prodotto di $(z+2)^2+1$, che porge due singolarità in $-2+I$ e $-2-I$ che sono poli semplici, ed una singolarità in 3, che è pure polo semplice.
Quindi si può scegliere il solito cammino $ABCDA$ con un grande cerchio DA che porge un contributo chiaramente nullo, un piccolo cerchio BC che circonda il polo 3 e che porge il contributo di

$$\int_{BC} f(z)dz = -\pi i \frac{3*3+4}{(3^2+4*3+5)} = -\pi i \frac{13}{26} = -\frac{\pi}{2} i$$

ed un polo interno che porge il contributo di

$$\int_{ABCDA} f(z)dz = \frac{\pi}{2}(1-i).$$

Si ricava quindi che

$$\int_{AB+CD} f(z)dz = \frac{\pi}{2}(1-i) + \frac{\pi}{2} i = \frac{\pi}{2}$$

TL Trasformando l'equazione si ha

$$s^3 Y - s^2 - 2s - 3 + Y = \frac{1}{s-1}$$

e si ricava che

$$Y = \frac{s^2+2s+3}{s^3+1} + \frac{1}{(s-2)(s^3+1)}$$

Ora non dobbiamo antitrasformare come il solito, ma ci basta osservare che

$$\mathcal{L}(ty) = -Y'(s) = \frac{(2s+2)(s^3+1) - (s^2+2s+3)3s^2}{(s^3+1)^2} - \frac{(s^3+1)+(s-2)3s^2}{(s-2)^2(s^3+1)^2}.$$

Infine usiamo il fatto che l'integrale cercato è la funzione appena scritta calcolata in zero. Si ha quindi

$$\int_0^{+\infty} ty(t)dt = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

MR 1. Le posizioni dei punti sono

$$OC = (-R\vartheta, 0), \quad OG = (-R\vartheta, R), \quad OA = (-R\vartheta, R) + R(\cos\vartheta, \sin\vartheta), \quad OP = (r, r)$$

2. L'energia potenziale è

$$U = U_g^P + U_k^{AP} = Mgr + \frac{1}{2}k|(-R\vartheta + R\cos\vartheta - r, R + R\sin\vartheta - r)|^2 =$$

$$= Mgr + \frac{1}{2}k(R^2\vartheta^2 + R^2\cos^2\vartheta + r^2 - 2R^2\vartheta\cos\vartheta + 2Rr\vartheta - 2rR\cos\vartheta + R^2 + R^2\sin^2\vartheta + r^2 + 2R^2\sin\vartheta - 2rR - 2rR\sin\vartheta)$$

$$Mgr + \frac{1}{2}k(R^2\vartheta^2 + 2r^2 - 2R^2\vartheta\cos\vartheta + 2Rr\vartheta - 2rR(\cos\vartheta + \sin\vartheta) + 2R^2\sin\vartheta - 2rR)$$

3. Per determinare gli equilibri si deriva

$$\begin{cases} \partial_r U = Mg + \frac{1}{2}k(4r + 2R\vartheta - 2R(\cos\vartheta + \sin\vartheta) - 2R) = 0 \\ \partial_\vartheta U = 2R^2\vartheta - 2R^2\cos\vartheta + 2R^2\vartheta\sin\vartheta + 2Rr - 2rR(-\sin\vartheta + \cos\vartheta) + 2R^2\cos\vartheta = 0 \end{cases}$$

non sono un sistema facile da risolvere, ma dobbiamo sostituire $\pi/2$ nelle equazioni, per cui si ottiene che

$$\begin{cases} \partial_r U = Mg + \frac{1}{2}k(4r + R\pi - 2R - 2R) = 0 \\ \partial_\vartheta U = R^2\pi + R^2\pi + 2Rr + 2rR = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava che

$$r = -\frac{R\pi}{2}, \qquad k = \frac{2Mg}{R(4+\pi)}$$

4. Si tratta di un disco spostato indietro nella ordinata $-R\pi/2$, con A in verticale sopra a G, e P in verticale appeso sotto a G. La molla è rigida quanto basta affinché P si trovi in equilibrio in quel punto.

5. Si potrebbe cercare di usare le equazioni dell'equilibrio, ed ottenere

$$\begin{cases} \partial_r U = Mg + \frac{1}{2}k(4r - 2R - 2R) = 0 \\ \partial_\vartheta U = -2R^2 + 2Rr - 2rR + 2R^2 = 0 \end{cases}$$

La seconda è sempre vera, la prima dice che $r = \frac{2kR-Mg}{2k}$, che indica infinite posizioni per P, una per ogni scelta di k, che vanno da $OP = (R, R)$ (quando k diventa infinita) a tutti gli OP sulla semiretta decrescente al decrescere del valore di k.
Pensando alle equazioni cardinali applicate al disco si ha che

$$\vec{\Phi}^C - mg\vec{j} + k(r-R)\vec{i} + k(r-R)\vec{i} = \vec{0}, \qquad CC \times \vec{\Phi}^C - CG \times (mg\vec{j}) + CA \times (k(r-R)\vec{i} + k(r-R)\vec{i}) = \vec{0}.$$

Entrambe queste equazioni sono soddisfatte con

$$\vec{\Phi}^C = (k(r-R), mg + k(r-R))$$

(la seconda equazione è sempre vera).
D'altro canto per quanto riguarda P si ha che

$$\varphi^P(1,-1) + (0, -Mg) + (k(r-R), k(r-R)) = (0,0) \quad \Rightarrow \varphi^P(1,-1) = (k(R-r), Mg + k(R-r))$$

Questa seconda equazione può essere soddisfatta solo se $r < R$, perché bisogna che $k(r-R) + Mg = -k(r-R)$, ovvero $2k(R-r) = Mg$ e quindi $R - r > 0$. Ogni volta che questa condizione è soddisfatta, allora esiste un k che renda possibile quella configurazione di equilibrio.