

Università degli Studi di Catania

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale, A.A. 2023-2024

Compito di Fisica Matematica - 23 Gennaio 2024

Non è ammesso l'uso di appunti e dispositivi elettronici. Non è permesso allontanarsi dall'aula prima di avere consegnato il compito. Esibire documento d'identità. Tempo per svolgimento: 2h30m.

Parte A

1. Calcolare attraverso il teorema dei residui l'integrale (nel senso del valor principale):

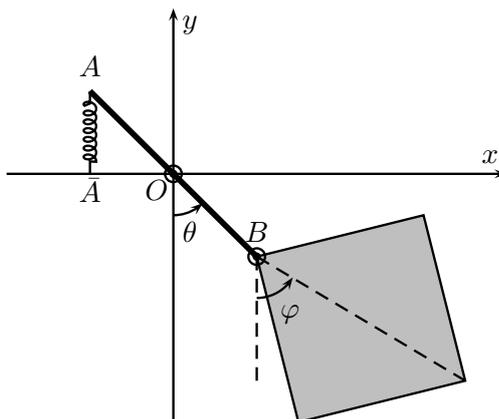
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - 2}{x^4 - 1} dx$$

2. Tramite le trasformate di Laplace, risolvere la seguente equazione integrale:

$$y - \int_0^t (t - u) y(u) du = \sinh(2t)$$

Parte B

Un sistema materiale vincolato a muoversi su un piano verticale è costituito da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza $2L$, il cui punto medio O è vincolato tramite una cerniera liscia a un punto fisso del piano. All'estremo B è vincolato, tramite una ulteriore cerniera liscia, un vertice di una lamina quadrata omogenea di lato $\sqrt{2}L$ e massa m . Oltre alla forza peso, sul sistema agisce una forza elastica $F_{el} = -\alpha \frac{mg}{L}(A - \bar{A}) = \alpha \frac{mg}{L}(A\bar{A})$, con $\alpha > 0$, applicata all'estremo A , dove \bar{A} è la proiezione di A sull'asse orizzontale passante per O .



Assunti il sistema di riferimento e le variabili lagrangiane θ, φ in figura:

- 1) Determinare le coordinate dei punti rilevanti del sistema in funzione delle variabili lagrangiane.
- 2) Calcolare il potenziale (o l'energia potenziale) totale.
- 3) Determinare α in modo che si abbiano configurazioni di equilibrio con $\theta = \frac{\pi}{4}$ e trovare per tale α tutte le configurazioni di equilibrio.
- 4) Studiare la stabilità delle configurazioni aventi $\varphi = 0$.
- 5) Calcolare l'energia cinetica totale del sistema.

Nota: momento d'inerzia di una lamina quadrata omogenea di massa M e lato ℓ rispetto all'asse ortogonale al piano della lamina e passante per il suo centro, $I_z = \frac{1}{6}M\ell^2$.

Svolgimento

1. L'integrale della funzione data sull'asse reale si ricollega, secondo le tecniche usuali, all'integrale della funzione complessa

$$f(z) = \frac{z^2 - 2}{z^4 - 1}$$

su un cammino che racchiude le singolarità contenute nel semipiano superiore. Le singolarità di $f(z)$ sono date da $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$ e quindi $z = \pm 1$ e $z = \pm i$, tutti poli del primo ordine. Notiamo che ± 1 sono punti dell'asse reale, quindi oltre ad applicare il lemma del grande cerchio (qua valido perché $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$), applicheremo il lemma del piccolo cerchio. Trattandosi di poli del primo ordine, i residui si valutano facilmente (anche ricordando che in caso di un polo semplice z_0 e funzioni del tipo $f(z) = N(z)/D(z)$ con $N(z_0) \neq 0$, si ha $\text{Res}(f, z_0) = N(z_0)/D'(z_0)$), trovando rispettivamente

$$\text{Res}(f, \pm 1) = \left. \frac{z^2 - 2}{4z^3} \right|_{z=\pm 1} = \mp \frac{1}{4} \quad \text{Res}(f, i) = \left. \frac{z^2 - 2}{4z^3} \right|_{z=i} = -\frac{3}{4}i.$$

Complessivamente otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - 2}{x^4 - 1} dx = 2\pi i \left(-\frac{3}{4}i \right) + \pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2}\pi.$$

2. Per risolvere l'equazione ne calcoliamo la trasformata di Laplace, notando che a primo membro troviamo la convoluzione delle funzioni t e $y(t)$, di trasformata rispettivamente $1/s^2$ e $Y(s)$ (incognita). Complessivamente troviamo l'equazione

$$Y(s) - \frac{Y(s)}{s^2} = \frac{2}{s^2 - 4} \quad \text{e quindi, esplicitando,} \quad Y(s) = \frac{2s^2}{(s^2 - 1)(s^2 - 4)}.$$

La funzione $Y(s)$ ha quattro poli semplici dati da $\pm 1, \pm 2$, con sviluppo in fratti semplici

$$Y(s) = -\frac{1}{3} \frac{1}{s-1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s+1} - \frac{2}{3} \frac{1}{s-2} + \frac{2}{3} \frac{1}{s+2}.$$

Antitrasformando troviamo $y(t) = \frac{1}{3}(-e^t + e^{-t} + 2e^{2t} - 2e^{-2t}) = \frac{2}{3}(-\sinh t + 2\sinh(2t))$.

Parte B

1. Si trova

$$B = (L \sin \theta, -L \cos \theta), \quad A = (-L \sin \theta, L \cos \theta),$$

notiamo che $OA = -OB$. La diagonale della lamina quadrata risulta $\sqrt{2}\sqrt{2}L = 2L$, e quindi il centro di massa della lamina è al centro geometrico della lamina, a distanza L da B . Se indichiamo con G tale punto, si ha

$$G = (L(\sin \theta + \sin \varphi), -L(\cos \theta + \cos \varphi)).$$

E' inoltre immediato trovare $\bar{A} = (-L \sin \theta, 0)$, e il centro di massa dell'asta coincide con l'origine O .

2. Le forze sono tutte conservative e ricaviamo

$$U_O = 0, \quad U_G = mgL(\cos \theta + \cos \varphi), \quad U_{el} = -\frac{1}{2}\alpha \frac{mg}{L}(L \cos \theta)^2,$$

sommando troviamo

$$U(\theta, \varphi) = mgL(\cos \theta + \cos \varphi - \frac{1}{2}\alpha \cos^2 \theta)$$

3. Per trovare il valore della costante α imponiamo che le componenti lagrangiane delle forze siano nulle

$$Q_\theta = \frac{\partial U}{\partial \theta} = mgL(-\sin \theta + \alpha \sin \theta \cos \theta) = 0, \quad Q_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mgL \sin \varphi = 0$$

per $\theta = \pi/4$. Sostituendo nella prima equazione troviamo

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad \text{quindi} \quad \alpha = \sqrt{2}.$$

Per questo valore di α si hanno le due equazioni

$$\sin \theta(-1 + \sqrt{2} \cos \theta) = 0, \quad \sin \varphi = 0,$$

con soluzioni $\theta = 0, \pi, \pm\pi/4$ e $\varphi = 0, \pi$. Notiamo che le due equazioni sono disaccoppiate, quindi le soluzioni del sistema sono date dalle otto possibili coppie di valori di θ e φ .

4. La stabilità delle quattro soluzioni aventi $\varphi = 0$ si studia considerando la matrice Hessiana della funzione potenziale totale. Osserviamo che le derivate seconde miste sono pari a zero, quindi la matrice Hessiana risulta diagonale con (a meno del fattore costante positivo mgL)

$$U_{\theta\theta} = -\cos \theta + \sqrt{2} \cos(2\theta), \quad U_{\varphi\varphi} = -\cos \varphi.$$

Essendo la matrice diagonale, i suoi elementi diagonali sono anche autovalori, e ricordiamo che la condizione di stabilità è che gli autovalori siano entrambi negativi.

In particolare si ha $U_{\varphi\varphi}(0) = -1$, quindi la stabilità dipende unicamente dalla negatività di $U_{\theta\theta}$ per i valori di θ trovati. Troviamo rispettivamente

$$U_{\theta\theta}(0) = -1 + \sqrt{2} > 0, \quad U_{\theta\theta}(\pi) = 1 + \sqrt{2} > 0, \quad U_{\theta\theta}(\pm\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0,$$

quindi si ha stabilità solo per $\theta = \pm\pi/4$.

5. Il sistema è composto da due corpi rigidi, l'asta e la lamina. L'asta esegue un moto di pura rotazione attorno al punto fisso O , per la lamina non abbiamo un moto puramente rotatorio o traslatorio ed è conveniente usare il teorema di Koenig sull'energia cinetica. L'asta (omogenea) ruota attorno al suo punto medio e quindi il momento d'inerzia è dato da

$$I_a = \frac{1}{12}m(2L)^2 = \frac{1}{3}mL^2,$$

e la sua energia cinetica risulta allora $T_a = \frac{1}{2}I_a\omega^2$ dove $\omega = \dot{\theta}$, quindi

$$T_a = \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2.$$

Il momento d'inerzia della lamina rispetto a un'asse passante per il suo baricentro G e ortogonale al piano xy è dato da

$$I_l = \frac{1}{6}m(\sqrt{2}L)^2 = \frac{2}{3}mL^2,$$

e l'energia cinetica rotazionale corrispondente è $T_{lr} = \frac{1}{2}I_l\omega^2$ dove notiamo che la rotazione attorno a G è controllata dall'angolo φ , quindi in questo caso $\omega = \dot{\varphi}$, quindi

$$T_{lr} = \frac{1}{2} \frac{2}{3}mL^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{3}mL^2\dot{\varphi}^2.$$

Troviamo la velocità del centro di massa G derivando le sue coordinate rispetto al tempo, e calcoliamo l'energia cinetica traslazionale $T_{lt} = \frac{1}{2}mV_G^2$

$$V_G = \dot{G} = (L(\cos\theta\dot{\theta} + \cos\varphi\dot{\varphi}), L(\sin\theta\dot{\theta} + \sin\varphi\dot{\varphi})), \quad T_{lt} = \frac{1}{2}mL^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta - \varphi)),$$

complessivamente

$$T = T_a + (T_{lr} + T_{lt}) = mL^2\left(\frac{2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{5}{6}\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta - \varphi)\right).$$

Table of Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. \sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12. $\sin(at) + at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13. $\cos(at) - at \sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14. $\cos(at) + at \sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	16. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
17. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23. $t^n e^{at}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
25. $u_c(t) = u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{e^{-cs}}{s}$	26. $\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	e^{-cs}
27. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	28. $u_c(t)g(t)$	$e^{-cs}\mathcal{L}\{g(t+c)\}$
29. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30. $t^n f(t), n=1,2,3,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31. $\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)du$	32. $\int_0^t f(v)dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	34. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$
35. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	36. $f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
37. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		