1. Dato il segmento AB di lunghezza 13, siano M ed N due punti di AB tali che $\overline{AM}$ = 12 e $\overline{BN}$ = 5. Quanto misura il segmento MN? Risposta 4

<u>Soluzione</u>: $\overline{MB} = \overline{AB} - \overline{AM} = 13 - 12 = 1$

$\overline{MN} = \overline{BN} - \overline{MB} = 5 - 1 = 4$

2. Quanti numeri divisibili per 3 si possono ottenere inserendo, in una qualsiasi posizione, una sola cifra nel numero 12345678910111? Risposta 45 oppure 42

<u>Soluzione</u> – Un numero è divisibile per 3 se la somma delle sue cifre è un multiplo di 3. La somma delle cifre del numero dato è 49 che non è multiplo di 3. Il primo multiplo di 3 maggiore di 49 è 51 e lo si ottiene se si inserisce la cifra 2 all'inizio, oppure alla fine o tra due cifre qualsiasi del numero dato, per un totale di 15 possibili inserimenti. Allo stesso modo possiamo ottenere un multiplo di 3 anche inserendo le cifre 5 oppure 8. Inserendo una di queste tre cifre si possono quindi ottenere 45 numeri divisibili per 3.

Se però teniamo conto che i tre numeri 122345678910111, 123455678910111 e 123456788910111 ottenuti sono contati due volte, possiamo anche considerare che i numeri sono 45 – 3 = 42.

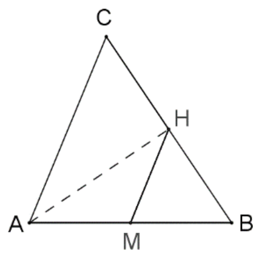
3. Nel gioco della tombola, in una cartella, si coprono i numeri che vengono estratti da un sacchetto contenente dischetti numerati da 1 a 90. Si fa ambo quando sulla stessa riga vengono coperti due numeri, tra i quali non c'è alcun altro numero scoperto, si fa terno quando sulla stessa riga vengono coperti tre numeri, tra i quali non c'è alcun altro numero scoperto. Sono già state fatte 20 estrazioni e Roberto, che ha la cartella rappresentata in figura, ha coperto i numeri: 13, 49, 46,56, 2, 59. Qual è la probabilità che Roberto faccia terno alla prossima estrazione? Risposta $\frac{1}{35}$

	13	24	32	49		64		
8	10			46	56			83
2		29		41	59			89

<u>Soluzione</u> – Qualunque numero sarà estratto alla prossima estrazione, nella prima o nella terza riga Roberto non farà mai terno perché non saranno mai coperti tre numeri senza alcun altro numero scoperto tra essi. Roberto può fare terno solo nella seconda riga, se esce il 10 o l'83. Ciascuno di essi ha probabilità $\frac{1}{70}$ di uscire. La probabilità di fare terno per Roberto è pertanto $\frac{2}{70} = \frac{1}{35}$.

4. Nel triangolo ABC, AB misura 13, BC misura 14, CA misura 15. Se M è il punto medio di AB e H il piede dell'altezza relativa a BC, quanto misura HM? Risposta $\frac{13}{2} = 6{,}5$

<u>Soluzione</u> – Poiché il triangolo ABH è rettangolo, possiamo considerarlo inscritto nella semicirconferenza di diametro AB. La mediana HM relativa all'ipotenusa AB è metà del diametro AB e la sua misura è $\frac{13}{2} = 6{,}5$



5. Trova il numero naturale n tale che:

$$n^2 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2020 + 2021 + 2022 + 2021 + 2020 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

Risposta 2022

<u>Soluzione</u> – $1 + 2 + 3 + \ldots + 2020 + 2021 = (1+2021) + (2+2020) + \ldots + (1010+1012) + 1011 =$

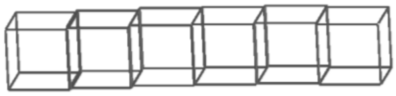
$= 2022 \cdot 1010+1011$

Allo stesso modo anche $2021 + 2020 + \ldots + 3 + 2 + 1 = 2022 \cdot 1010 + 1011$

Sommando si ha $2 \cdot (2022 \cdot 1010 + 1011) + 2022 = 2022 \cdot 2020 + 2022 + 2022 = 2022 \cdot 2022$

da cui $n^2 = 2022^2$ ed $n = 2022$

6. È stata realizzata la costruzione a fianco con 6 dadi numerati, incollando tra loro tutte le facce a contatto. Per i dadi vale la seguente regola: la somma dei numeri posti su due facce opposte vale sempre 7. Qual è il risultato minimo che possiamo ottenere sommando tutti i numeri delle facce non a contatto dei dadi?



Risposta 86

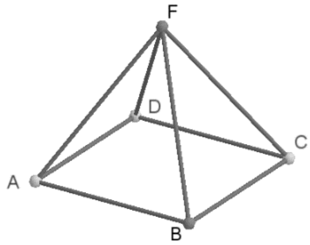
<u>Soluzione</u> – La somma dei numeri delle facce opposte di un dado è sempre 7. Ne segue che, in ciascun dado, le due coppie di facce opposte visibili contribuiscono alla somma con 14. Il risultato minimo lo si ottiene quando le due facce esterne del primo e dell'ultimo dado hanno il numero 1. Pertanto, il risultato minimo che possiamo ottenere sommando tutti i numeri delle facce non a contatto dei dadi è $6 \cdot 14 + 1 + 1 = 86$

7. Se $\frac{a}{b}$ = 2 e $\frac{c}{b}$ = 3, quale è il rapporto tra *a+b* e *b+c*? Risposta 3/4

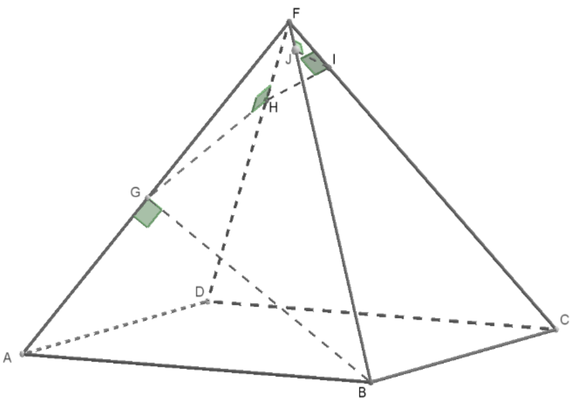
<u>Soluzione 1</u> – Poiché *a = 2b* e *c = 3b* possiamo dedurre che *a+b = 3b* e *b+c = 4b* e, dividendo membro a membro $\frac{a+b}{b+c} = \frac{3}{4}$

<u>Soluzione 2</u> – Scriviamo i due rapporti sotto forma di proporzione: *a : b = 2 : 1* *c : b = 3 : 1* e applichiamo ad entrambe la proprietà del comporre: *(a+b) : b = 3 : 1* *(c+b) : b = 4 : 1* da cui *a+b = 3b* e *c+b = 4b* e, dividendo membro a membro: $\frac{a+b}{b+c} = \frac{3}{4}$

8. Su una piramide regolare a base quadrata, con tutti gli spigoli uguali e lunghi 6 metri, si vuole realizzare un percorso turistico panoramico (continuo) che parta da un vertice della base, attraversi tutte le sue facce laterali e si fermi appena raggiunto lo spigolo che contiene tale vertice. Il percorso, su ciascuna faccia, deve essere il più breve possibile. Quanti metri è lungo tale percorso? Risposta $3\frac{15}{8}\sqrt{3} \cong 9{,}7$



<u>Soluzione</u> – Le facce laterali sono triangoli equilateri. Il percorso più breve è quello formato dalla spezzata BGHIJ, somma dei segmenti:



- BG (distanza tra B e lo spigolo FA, altezza del triangolo equilatero ABF)
- GH (distanza tra G e lo spigolo FD)
- HI (distanza tra H e lo spigolo FC)
- IJ (sulla faccia BFC, distanza fra I e lo spigolo FB).

Si ha:

- BG, altezza del triangolo equilatero di lato 6, è: $\overline{BG} = \frac{6}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.
- GH, cateto maggiore del triangolo rettangolo GHF, con un angolo 60° e ipotenusa $\overline{GF} = 3$, è $\overline{GH} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$
- HI, cateto maggiore del triangolo rettangolo HFI, con un angolo 60° e ipotenusa $\overline{FH} = \frac{3}{2}$, è $\overline{HI} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.
- IJ, cateto maggiore del triangolo rettangolo IJF, con un angolo 60° e ipotenusa $\overline{FI} = \frac{3}{4}$, è $\overline{JI} = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Il percorso minimo è quindi:

$$\overline{BG} + \overline{GH} + \overline{HI} + \overline{IJ} = 3\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{8} = 3\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 3\frac{15}{8}\sqrt{3} \cong 9{,}7$$

9. I quadrati di due numeri interi positivi *a* e *b* differiscono di 209. Quanto può valere *a* + *b*?

Risposta 19 e 209

<u>Soluzione</u> – Sia a > b. Si ha:

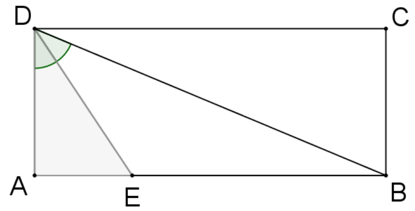
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 209 = 1 \cdot 209$ oppure $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 11 \cdot 19$.

Poiché a e b sono entrambi positivi, e quindi $a+b > a-b$, nel primo caso è $a - b = 1 \; e \; a + b = 209$ e nel secondo caso $a - b = 11 \; e \; a + b = 19$.

Pertanto a+b può valere sia 19 sia 209.

10. Alberto ha un cartoncino rettangolare, che indichiamo con ABCD, di lati 5 e 12. Da tale cartoncino deve ritagliare un triangolo rettangolo ADE, avente un cateto coincidente con il lato minore AD del rettangolo e l'ipotenusa DE sulla bisettrice dell'angolo $\widehat{ADB}$. Alberto vuole sapere quanto vale l'area di tale triangolino. Risposta $\frac{25}{3}$

Dopo aver calcolato la misura della diagonale DB che è 13:



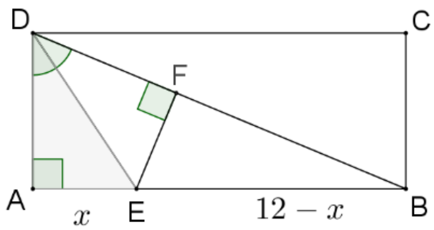
<u>Soluzione 1</u> - DE è la bisettrice dell'angolo $\widehat{ADB}$ del triangolo ADB, ne segue che DA : DB = AE : EB. Se $\overline{AE} = x$

5 : 13 = x : (12-x) da cui *(5+13) : 5 = (x+12-x) : x*

cioè *18: 5 = 12 : x* e quindi $x = \frac{12 \times 5}{18} = \frac{10}{3}$

Pertanto, l'area del triangolino AED vale $\frac{10}{3} 5 = \frac{25}{3}$

<u>Soluzione 2</u> – Poiché la bisettrice di un angolo è il luogo dei punti che hanno uguale distanza dai lati dell'angolo, ne segue che, detto F il piede della perpendicolare a DB condotta da E, le distanze EA e EF sono uguali. Allora, i triangoli rettangoli ADE e DEF sono uguali e pertanto lo sono anche i cateti AD e DF. Dunque, $\overline{AD} = \overline{DF} = 5$ e $\overline{FB} = 13 - 5 = 8$.



Poniamo $\overline{AE} = x$ e applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo BEF. Si ha:

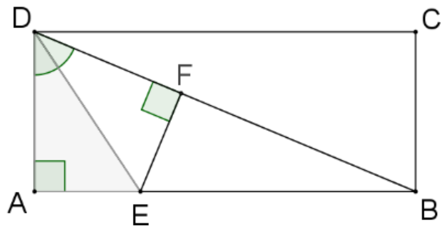
$(12-x)^2 = 8^2 + x^2$; $144 + x^2 - 24x = 64 + x^2$;

$144 - 24x = 64$; $x = \frac{80}{24} = \frac{10}{3}$

Pertanto l'area del triangolino AED $\frac{10}{3} 5 = \frac{25}{3}$

<u>Soluzione</u> 3 – Indichiamo con E il punto d'intersezione della bisettrice con AB e con EF la distanza di E da DB. Essendo tutti i punti della bisettrice equidistanti dai lati dell'angolo, si ha AE = EF e Area (AED) + Area (EBD) = Area (ABD)

Posto $\overline{AE} = x$ si deduce che:



$\frac{1}{2} 5x + \frac{1}{2} 13x = \frac{1}{2} 5 * 12$ ➔ 18x = 60 ➔ x = $\frac{10}{3}$ ➔ Area AED $= \frac{1}{2} \frac{10}{3} 5 = \frac{25}{3}$