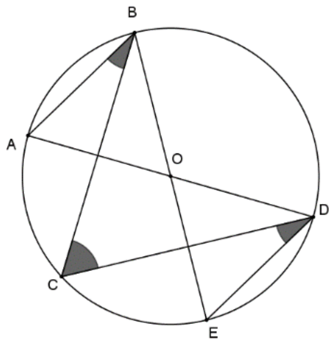
1. *Scrivi le ultime 4 cifre del numero ($10^{2022} - 1)^3$.* Risposta 9999

<u>Soluzione</u> – Dallo sviluppo del cubo del binomio si ottengono 4 termini di cui tre contengono certamente potenze di 10. La somma di questi termini avrà molte cifre finali uguali a 0. Sommare il quarto termine, che è –1, significa considerarne il numero precedente e le ultime cifre saranno pertanto 9999.

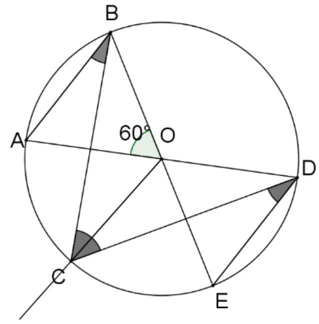


2. *Nella circonferenza di centro O (figura a fianco), l'angolo AOB è 60°. Quanto vale la somma degli angoli segnati in grigio?* Risposta 120°

<u>Soluzione 1</u> – Il triangolo AOB, isoscele con angolo al vertice di 60°, è equilatero e pertanto anche $\widehat{ABE} = \widehat{BAD} = 60°$. Poiché sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\widehat{CBE} = \widehat{CDE}$ e $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 60°$. Quindi la somma richiesta vale:

$$\widehat{BCD} + \widehat{ABC} + \widehat{CDE} = \widehat{BCD} + (\widehat{ABC} + \widehat{CBE}) = 60° + 60° = 120°$$

<u>Soluzione 2</u> – Si ha $\widehat{AOE} = \widehat{BOD}$ = 180°- 60° = 120°. L'angolo alla circonferenza $\widehat{BCD}$ è la metà dell'angolo al centro corrispondente $\widehat{BOD}$. Ne segue che $\widehat{BCD} = 60°$.

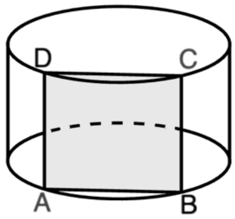


Consideriamo la semiretta OC. Si ha: $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC}$ perché, rispettivamente, angolo al centro e angolo alla circonferenza corrispondenti e, analogamente, $\widehat{COE} = 2\widehat{CDE}$.

Ne segue che $\widehat{ABC} + \widehat{CDE} = \frac{1}{2}(\widehat{AOC} + \widehat{COE}) = 60°$ e dunque $\widehat{BCD} + \widehat{ABC} + \widehat{CDE} = 60° + 60° = 120°$

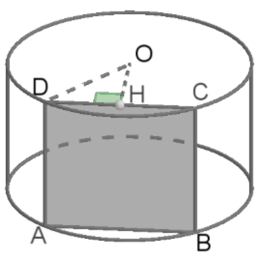
3. *Il punteggio medio degli studenti che hanno partecipato alla gara di matematica è stato 12. Il 25% degli studenti aveva partecipato agli allenamenti e il loro punteggio medio è stato 18. Quanto vale il punteggio medio degli studenti che non hanno partecipato agli allenamenti?* Risposta 10

<u>Soluzione</u> – Detto p il punteggio medio degli studenti che non avevano mai partecipato agli allenamenti e *n* il numero dei partecipanti si ha: $\frac{18\frac{25}{100}n+p\frac{75}{100}n}{n}$ = 12, da cui si ricava p = 10



4. *Per dividere un contenitore cilindrico in due parti, Luigi vi introduce una lamina rettangolare, perpendicolare alla base. La lamina ABCD, di dimensioni AB = 12 cm e AD = 10 cm, non passa per l'asse di simmetria del cilindro e dista da esso 2 cm. Quanto vale il volume del contenitore?*

Risposta 1256



<u>Soluzione</u> – Sia O l'intersezione tra la base superiore del cilindro e il suo asse di simmetria e OH il segmento perpendicolare a CD. Tale segmento, che dimezza la corda CD, rappresenta la distanza della lamina dall'asse del cilindro che è 2 cm. Il quadrato del raggio OD del cilindro, per il teorema di Pitagora vale $\overline{\mathrm{OD}}^2 = 2^2 + 6^2$ = 40. Pertanto, il volume del cilindro vale

$$\pi \cdot 40 \cdot 10\ \mathrm{cm}^3 = 400\ \pi\ \mathrm{cm}^3 = 1256\ \mathrm{cm}^3$$

5. *Luca è un eremita che vive isolato sulle montagne, in una capanna sprovvista di energia elettrica. L'unica luce di cui dispone è quella delle candele. Oggi le ha contate e gliene restano 100. Ne consuma una al giorno ma riesce a fabbricarne una nuova utilizzando i resti di 7 candele. Per quanti giorni ancora Luca avrà luce?* Risposta 116

Soluzione – Dopo 100 giorni l'eremita avrà resti per altre 100:7 = 14 candele, con due resti che rimangono inutilizzati; con i resti delle 14 candele potrà ancora realizzare altre due candele. In totale i giorni di luce saranno

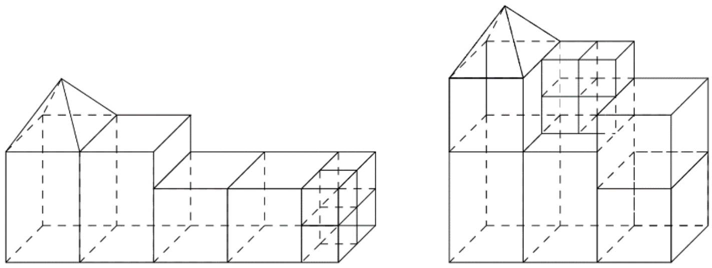
$$100 + 14 + 2 = 116$$

6. *Marina fa la volontaria per un'associazione che raccoglie fondi per beneficenza. In occasione della festa delle luci sono state realizzate delle lanterne colorate che vengono offerte con due tariffe, il prezzo pieno di 20 euro e quello ridotto di 5 euro, riservato a chi mangia alla proloco. Marina sistema il suo banchetto nel posto assegnatole e alla fine della serata consegna agli organizzatori il ricavato: ha venduto 15 lanterne per un totale di 150 euro. Quante sono le lanterne a tariffa ridotta che ha venduto?* Risposta 10

Soluzione 1 – Se tutte le 15 lanterne fossero vendute a tariffa ridotta, il ricavato sarebbe 75 euro. Mancano 75 euro. Ogni lanterna venduta a prezzo intero costa 15 euro in più della ridotta. Il numero di lanterne a prezzo intero deve essere dunque 75 : 15 = 5. Ne segue che le lanterne a tariffa ridotta sono 15 – 5 = 10.

Soluzione 2 – il quesito si può anche risolvere ricorrendo a un sistema

7. *Carlo e Diego giocano con i cubotti, solidi di legno, tutti a base quadrata, a forma di parallelepipedi retti o piramidi rette. Le piramidi hanno tutte la stessa altezza. I parallelepipedi hanno altezze di tre diverse misure e solo quelli di altezza massima non sono cubi. Le misure di tutti gli spigoli e delle altezze dei vari cubotti sono numeri interi. Carlo ha realizzato la struttura a sinistra nella figura e Diego quella a destra. Sapendo che il volume* V_C *della struttura di Carlo vale* $\frac{136}{3}$ *e detto* V_D *il volume della struttura di Diego, quanto vale 100* V_D*?* Risposta 5333



Soluzione – Della struttura di Carlo sappiamo che $V_C = \frac{136}{3} = 45{,}33$ e che tutte le misure sono numeri interi. Se ipotizziamo che la misura dello spigolo del cubo più piccolo sia 2, quella dei cubi intermedi sarà 4 e i loro volumi rispettivamente 8 e 64. Questo significa che il volume dell'intera struttura supererebbe abbondantemente V_C. Possiamo concludere che lo spigolo del cubo piccolo deve essere 1, quello del cubo intermedio 2 e l'altezza dei parallelepipedi almeno 3.

Dal confronto delle due costruzioni possiamo osservare che sono composte dagli stessi pezzi e la struttura di Diego ha solo un cubo in più rispetto alla struttura di Carlo, quello di spigolo 2 posizionato sotto la piramide. Pertanto,

$$V_D = V_C + 8 = \frac{136}{3} + 8 = \frac{160}{3} = 53{,}33 \qquad \text{e} \qquad 100\ V_D = 100 \cdot 53{,}33 = 5333$$

8. *La prof.ssa di matematica ha portato in classe quattro dadi uguali a forma di tetraedro regolare che portano sulle quattro facce i numeri 0, 1, 2, 3 e ci ha posto il seguente quesito: "Lanciando i quattro dadi qual è la probabilità che possiamo comporre il numero 1202 usando per ogni dado una delle tre facce visibili?" Riporta le prime 4 cifre decimali.* Risposta 9414

Soluzione – Per ogni dado ci sono 4 possibili esiti, in tutto quindi i casi possibili sono $4^4 = 256$. Poiché sono visibili 3 facce su 4, è conveniente calcolare la probabilità dell'evento contrario. Il numero dei casi sfavorevoli è 15 e precisamente:

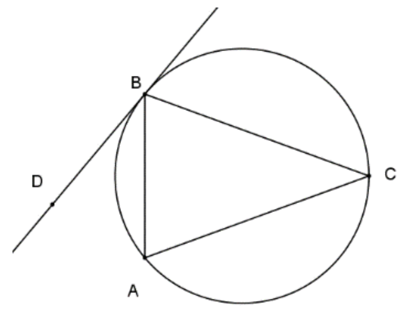
- tre in cui sulla faccia non visibile di ciascuno dei 4 quattro tetraedri c'è lo stesso numero 0, oppure 1 oppure 2,
- più i tre casi (ciascuno di questi 3 casi va considerato 4 volte) in cui non sono visibili tre facce col numero 2 e la quarta faccia sia 0, oppure 1 oppure 3.

Esplicitiamo i quindici casi, scrivendo il numero riportato sulla faccia nascosta:

- 0, 0, 0, 0 1, 1, 1 ,1 2, 2, 2, 2
- 2, 2, 2, 0 2, 2, 0, 2 2, 0, 2, 2 0, 2, 2, 2
- 2, 2, 2, 1 2, 2, 1, 2 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2
- 2, 2, 2, 3 2, 2, 3, 2 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 2

In tutto 3 + 3x4 = 15 casi sfavorevoli e quindi 241 casi favorevoli. Pertanto, la probabilità richiesta è 241/256 = 0,9414

9. *Nella figura a fianco i segmenti BC e AC misurano entrambi 3,76 cm e l'angolo ACB misura 40°. Qual è la misura in gradi dell'angolo DBC che BC forma con la tangente DB alla circonferenza in B?* Risposta 110



Soluzione – Il triangolo ABC è isoscele sulla base AB, pertanto,

$$\widehat{ABC} = \frac{180° - 40°}{2} = 70°.$$

Gli angoli DBA e ACB sono uguali perché insistono sullo stesso arco $\dot{AB}$, pertanto

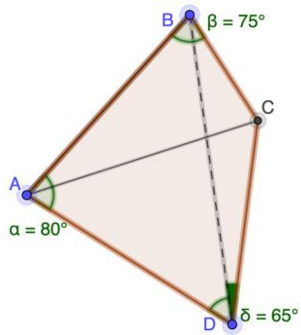
$$\widehat{DBC} = \widehat{DBA} + \widehat{ABC} = 40° + 70° = 110°.$$

10. *Sia A = mcm (234567898765, 234567898). Qual è la cifra delle unità di A?* Risposta 0

Soluzione – La scomposizione in fattori del primo numero, che termina con 5, contiene certamente il fattore 5. La scomposizione in fattori del secondo numero, che termina con un numero pari, contiene certamente il fattore 2. Ne segue che A deve necessariamente avere come fattori almeno un 2 e almeno un 5, ovvero A è multiplo di 10. Pertanto, la cifra delle unità di A è 0.

11. *Bianca e Carlo hanno vinto il bando per la ristrutturazione della piazza della loro città. Carlo stamattina ha effettuato le misurazioni che riporta in un disegno. Nel pomeriggio le presenta a Bianca: "La piazza è un quadrilatero convesso, che ho indicato con ABCD, con il lato AB e la diagonale AC che hanno la stessa misura, l'angolo BAD di 80°, l'angolo ABC di 75° e l'angolo ADC di 65°." Bianca ha però bisogno di conoscere la misura dell'angolo BDC e la chiede a Carlo che*

risponde: "Non l'ho misurato ma si può calcolare con i dati conosciuti". Quanti gradi misura l'angolo BDC? Risposta 15



Soluzione – Riportiamo nel quadrilatero ABCD le misure note. Nel triangolo isoscele ABC gli angoli alla base BC misurano entrambi 75°. Possiamo dedurre che l'angolo BAC è di 30° e l'angolo CAD 50°. Il triangolo ACD, che ha un angolo di 50° e un altro di 65°, avrà il terzo angolo ACD di 65° ed è pertanto isoscele sulla base CD. Quindi AB = AC = AD per cui anche il triangolo ABD è isoscele sulla base BD e ha l'angolo in A di 80° e i due angoli alla base di 50°. Per differenza si ha che $\widehat{BDC} = \widehat{ADC} - \widehat{BDC}$= 65° – 50° = 15°.

12. *Agata vuole realizzare al centro del pavimento nel suo salone un riquadro, utilizzando le belle mattonelle decorate dal suo amico ceramista Aldo. Agata pensava a una serie di mattonelle quadrate sistemate in modo da formare un grande quadrato e Aldo le suggerisce di completare il "quadro" aggiungendo una cornice di mattonelle azzurre. Tutte le mattonelle hanno la stessa dimensione. Aldo ha preparato lo stesso numero di mattonelle per la parte centrale e per il contorno. Ha calcolato che le utilizzerà tutte e ne avanzerà solo una azzurra. Quante sono in totale le mattonelle realizzate da Aldo?* Risposta 50

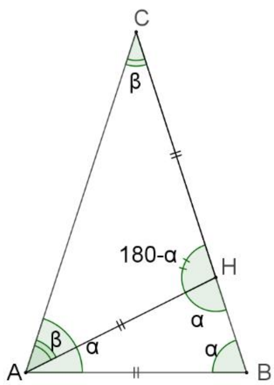
Soluzione 1 – Detto n il numero totale di mattonelle su un lato del quadrato, sono n^2 le mattonelle al centro, mentre sono 4n + 4 quelle azzurre della cornice. Si ha quindi:

$n^2 - 1 = 4n + 4$ $n^2 - 4n - 5 = 0$ $n = 2 \pm 3$ $n = 5$ totale $n^2 + 4n + 4 + 1 = 50$

Soluzione 2- Detto n il numero totale di mattonelle su un lato del quadrato si ha

$n^2 - 1 = 4n + 4$ e scomponendo in fattori (n-1) (n+1) = 4(n+1). Poiché n+1 è certamente diverso da zero, dividendo primo e secondo membro per n+1 si ottiene: n – 1 = 4 e quindi n = 5.

13. *Nel triangolo isoscele ABC di base AB, il punto H del lato BC è tale che AH = AB = HC. Qual è la misura dell'angolo di vertice C? Risposta 36*



Soluzione – Se *AH* = *AB* = *HC*, i triangoli ABC, ABH e AHC sono isosceli e hanno $\widehat{ABC} = \widehat{BAC} = \widehat{AHB}$ e $\widehat{HAC} = \widehat{HCA}$. Indichiamo con α la misura dell'angolo di vertice B, con β la misura dell'angolo di vertice C. Per il teorema dell'angolo esterno applicato al triangolo AHC, si ha: $\alpha = 2\beta$. Se consideriamo il triangolo ABC possiamo scrivere

$$\beta + 2\beta + 2\beta = 180° \text{ da cui } \beta = 36°.$$

Pertanto, l'angolo angolo di vertice C misura 36°

14. *Quanti sono i triangoli distinti aventi i lati di lunghezza intera e perimetro uguale a 31? Ricorda che due triangoli che hanno tutti e tre i lati di eguale lunghezza sono uguali.* Risposta 24

Soluzione 1 – Tutte le terne devono verificare le relazioni che legano le misure dei lati di un triangolo, cioè ciascun lato deve essere minore della somma e maggiore della differenza degli altri due. Con perimetro 31, il lato maggiore del triangolo non può avere misura maggiore di 15. I casi possibili, partendo dal lato maggiore, sono allora le terne:

15	15	1	14	14	3		13	13	5	
15	14	2	14	13	4		13	12	6	
15	13	3	14	12	5		13	11	7	
15	12	4	14	11	6		13	10	8	
15	11	5	14	10	7		13	9	9	
15	10	6	14	9	8					
15	9	7								
15	8	8		12	12	7		11	11	9
				12	11	8		11	10	10
				12	10	9				

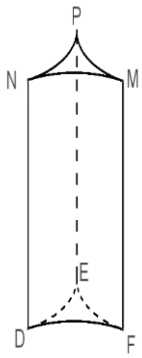
In totale: 8 + 6 + 5 + 3 + 2 = 24

Soluzione 2 – Tutte le terne devono verificare le relazioni che legano le misure dei lati di un triangolo, cioè ciascun lato deve essere minore della somma e maggiore della differenza degli altri due. Chiameremo valide tali terne. Partendo dal lato minore:

- Terne valide in cui 1 è il numero più piccolo (1,15, 15).
- Terne valide in cui 2 è il numero più piccolo (2, 14, 15).
- Terne valide in cui 3 è il numero più piccolo (3,13,15) e (3,14,14).
- Terne valide in cui 4 è il numero più piccolo (4,12,15) e (4,13,14).
- Terne valide in cui 5 è il numero più piccolo (5, 11, 15), (5, 12, 14), (5, 13, 13)
- Terne valide in cui 6 è il numero più piccolo (6, 10, 15), (6, 11, 14), (6,12, 13)
- Terne valide in cui 7 è il numero più piccolo (7, 9, 15), (7, 10, 14), (7, 11, 13), (7, 12, 12).
- Terne valide in cui 8 è il numero più piccolo (8, 8, 15), (8, 9, 14), (8, 10, 13), (8, 11, 12).
- Terne valide in cui 9 è il numero più piccolo (9, 9, 13), (9, 10, 12), (9, 11, 11).
- Terne valide in cui 10 è il numero più piccolo (10, 10, 11).

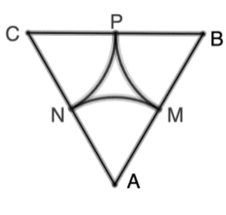
Le terne che contengono numeri maggiori di 10 contengono necessariamente anche numeri minori di 10 e quindi sono già state considerate. In definitiva il numero totale di triangoli distinti aventi i lati di misura intera e perimetro uguale a 31 è 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 3 + 1 = 24

15. *La figura a fianco rappresenta la ventola di un elettrodomestico. Gli spigoli laterali della figura, ND, MF, PE, sono lunghi 1 metro. Le due figure curvilinee PNM e DEF sono le sezioni della ventola con due piani perpendicolari agli spigoli e paralleli fra loro. Il perimetro di ogni sezione è costituito da 3 archi di circonferenza. Ogni arco ha centro in uno dei vertici di un triangolo equilatero di lato 8 cm e gli estremi nei punti medi dei lati di tale triangolo. Trova quanti cm^2 misura la superficie laterale della ventola.*



Risposta 1256

Soluzione - Nel triangolo equilatero ABC di lato 8 cm (figura a fianco) i tre archi NP, NM, PM, formano tre settori circolari di ampiezza 60° = $\frac{1}{6}360°$. Ne segue che ciascuna delle superfici NMFD, MPEF, PNDE è equivalente a 1/6 della superficie laterale di un cilindro di altezza ND e raggio di base r = AB/2 = 4 cm. La somma delle tre superfici è quindi equivalente alla metà della superficie laterale di tale cilindro. L'area della superficie laterale della ventola è dunque



$$\frac{2\pi\cdot r\cdot\overline{ND}}{2} = \pi\cdot 4\cdot 100 = 400\cdot 3{,}14 = 1256$$