

MIDDLE ETNIADE TEAM CUP Simulazione del 19 aprile 2021

1. Al parco divertimenti nei giorni festivi si registrano molti ingressi. Una bella domenica di aprile il numero dei visitatori è stato davvero particolare: corrisponde alla differenza fra il più grande e il più piccolo numero intero positivo formato da tre cifre diverse fra loro. Quanti ingressi vennero registrati quel giorno? Risposta 885

Soluzione – $987 - 102 = 885$

2. In un triangolo ABC sappiamo che $AB = 109.7$ cm e $AC = 112.6$ cm e che la misura del lato BC, espressa in cm, è un numero intero. Quanti sono i possibili valori diversi per la lunghezza del lato BC? Risposta 220

Soluzione – In un triangolo un lato può assumere ogni valore minore della somma degli altri 2 lati ma maggiore della loro differenza. In questo caso si ha: $AC + AB = 222,3$ cm e $AC - AB = 2,9$ cm. Di conseguenza la misura in cm di BC può assumere tutti i valori interi che vanno da 3 a 222, che sono 220.

3. Considerati i primi 100 numeri naturali, sono state inserite in un'urna le loro quarte potenze. Detta p la probabilità che, preso a caso un numero dall'urna, la sua cifra delle unità sia 6, quanto vale $1000 \cdot p$? Risposta 400

Soluzione - Consideriamo i numeri dallo 0 al 9, e osserviamo la seguente tabella. Si ha:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^4	0	1	16	81	256	625	6	1	6	1

Dalla tabella si evince che, per i numeri da 0 a 9, quattro delle loro quarte potenze finiscono per 6, quattro finiscono per 1, una finisce per 5 e una finisce per 0. Pertanto, se i numeri fossero solo i primi 10 la probabilità sarebbe $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Quanto detto vale anche per le altre 10 decine, ne segue che la probabilità richiesta è $\frac{4 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{2}{5}$, ovvero ancora $\frac{2}{5}$.

4. In un insieme di 80 poligoni il 75% sono quadrilateri, il 60% dei quadrilateri sono parallelogrammi. Dei parallelogrammi il 50% sono rombi e il 75 % sono rettangoli. Qual è il numero minimo di quadrati? Risposta 9

Soluzione - Si ha:

$$\frac{75}{100} 80 = 60 (\text{numero dei quadrilateri}); \quad \frac{60}{100} 60 = 36 (\text{numero dei parallelogrammi});$$

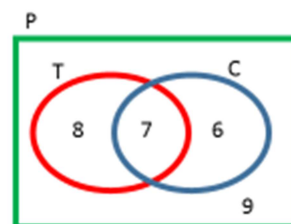
$$\frac{50}{100} 36 = 18 (\text{numero dei rombi}); \quad \frac{75}{100} 36 = 27 (\text{numero dei rettangoli});$$

Poiché la somma dei rombi e dei rettangoli supera di 9 il numero dei parallelogrammi, almeno 9 devono essere sia rombi, sia rettangoli, cioè quadrati

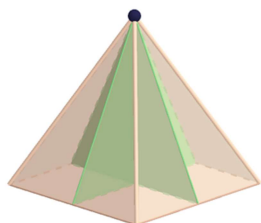
5. Su un volo di linea, nel timore che possano verificarsi interferenze, una hostess raccoglie informazioni fra i passeggeri e chiede: <<Chi ha il tablet acceso?>> e si alzano 15 mani; <<Chi ha il cellulare acceso?>> e conta 13 mani; <<Chi li ha entrambi accesi?>> e le mani alzate sono 7; <<Chi li ha entrambi spenti o non li ha con sé?>> e alzano la mano in 9. Quanti sono i passeggeri sull'aereo? Risposta 30

Soluzione – Il quesito si risolve facilmente utilizzando un diagramma di Venn, indicando con P l'insieme di tutti i passeggeri e con T e C gli insiemi dei passeggeri che hanno rispettivamente il tablet o il cellulare acceso.

7 passeggeri hanno sia tablet sia cellulare accesi ($T \cap C$), quindi dei 15 che hanno il tablet acceso sono 8 quelli che hanno solo il tablet acceso e dei 13 che hanno il cellulare acceso sono 6 quelli che hanno solo il cellulare acceso per un totale di 21 persone. Se a questi aggiungiamo i 9 che li hanno entrambi spenti o non li hanno con sé il totale dei passeggeri è 30.



6. L'alberello di Natale è formato da quattro triangoli rettangoli uguali, aventi un cateto in comune e le cui ipotenuse, unici apotemi di una piramide regolare, misurano 5 dm ciascuna. Se il cateto comune è 4 dm, quanto misura in dm^2 , la superficie laterale di tale piramide? Risposta 60



Soluzione – La piramide può essere solo una piramide retta a base quadrata il cui spigolo di base è il doppio del cateto non comune dei quattro triangoli. Tale cateto si trova applicando il teorema di Pitagora a uno di tali triangoli rettangoli e misura 3 dm. Il lato della base quadrata è 6, la superficie laterale della piramide è $\frac{1}{2} 24 \cdot 5 = 60$

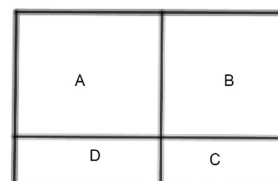


7. Alberto ha dimenticato la combinazione della sua cassaforte, ma si ricorda che era un numero di quattro cifre, tutte diverse da zero e non necessariamente diverse tra loro, e che la somma della prima e dell'ultima cifra è 9, mentre la somma della seconda e della terza è 7. Quanti tentativi dovrà fare, al massimo, per aprire la cassaforte? Risposta 48

Soluzione - Chiamiamo le cifre 1^a , 2^a , 3^a , 4^a , nell'ordine le 4 cifre della combinazione. I modi di scegliere la 1^a e la 4^a , poiché la loro somma è 9, sono 8: 1 e 8, 2 e 7, 3 e 6, 4 e 5 e le coppie che si ottengono scambiando tali cifre. Ricordiamo che la prima e l'ultima non possono assumere valore 0, né essere uguali, poiché 9 è dispari. Analogamente, i modi di scegliere la 2^a e la 3^a , poiché la loro somma è 7, sono 6: 1 e 6, 2 e 5, 3 e 4, e le coppie che si ottengono scambiando tali cifre. Di conseguenza i modi di scegliere le quattro cifre della combinazione sono in tutto $8 \cdot 6$, cioè 48.

8. L'area del rettangolo B è 169, quella del rettangolo C è 91 e quella rettangolo D è 105. Quanto misura l'area del quadrilatero A, sapendo che tutte le dimensioni sono intere? Risposta 195

Soluzione. Se l'area di B è 169 e le sue dimensioni sono numeri interi, poiché $169 = 13^2$, ne segue che B è un quadrato di lato 13, di conseguenza le dimensioni di C sono 13 e 7 e le dimensioni di D sono 7 e 15. Allora le dimensioni di A sono 15 e 13 e la sua area vale 195.

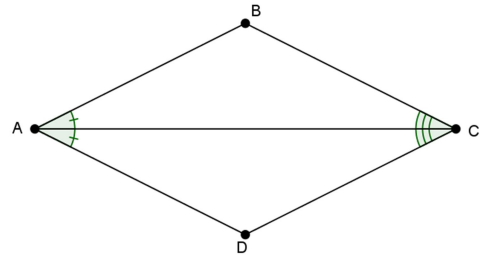


9. Ada ha un sacchetto con dentro dei cartoncini su ciascuno dei quali è scritta una delle seguenti cifre: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Qual è la probabilità che estraendoli tutti, uno alla volta senza reinserirli, le cifre scritte sopra, disposte nell'ordine in cui sono uscite, formino un numero divisibile per 3? Risposta 1

Soluzione - La somma delle cifre è un multiplo di 3 comunque siano disposte, pertanto, non potranno che formare numeri multipli di 3. La probabilità richiesta è quindi la certezza 1.

10. La diagonale AC di un quadrilatero ABCD è bisettrice degli angoli A e C. inoltre la misura di AB e di BC è 7. Quanto misura AD? Risposta 7

Soluzione – Se $AB = BC$, il triangolo ABC è isoscele e i suoi angoli alla base sono uguali. Poiché AC è bisettrice, devono essere uguali anche gli angoli alla base del triangolo ADC che pertanto è isoscele e uguale ad ABC. Ne segue che il quadrilatero avendo i 4 lati uguali è un rombo e AD misura 7.



11. Alcune scatole contengono, in totale, 100 biglie. Non ci sono scatole vuote e non ci sono scatole che contengono un numero uguale di biglie. Quante sono al più le scatole? Risposta 13

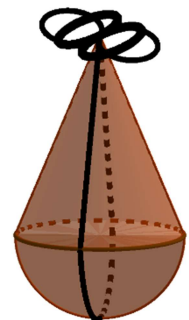
Soluzione – Affinché il numero delle scatole sia il più grande possibile, ciascuna di esse deve contenere il minor numero possibile di biglie. Quindi è necessario scegliere per le varie scatole numeri consecutivi di biglie a cominciare da 1 che è il più piccolo. La somma dei primi numeri che non supera 100 è: $1+2+3+\dots+13 = 91$. Le 9 biglie che rimangono non mi permettono di riempire un'altra scatola ma posso distribuirle fra le ultime delle 13 scatole, ad esempio inserirle nell'ultima. In ogni caso, al più le scatole sono 13.

12. Giulia deve acquistare un nuovo telefono cellulare. Nel negozio vicino casa ne ha visto uno scontato del 50% perché non è l'ultimo modello e ne sono rimasti solo due pezzi. Il giorno seguente torna in negozio con la mamma per comprarlo e scopre con sorpresa che il negozio, per via dei saldi, praticava un ulteriore sconto del 20%. Inoltre, la mamma aveva anche scaricato un buono online del 10%. Insomma, alla fine cumulando tutti gli sconti con quale percentuale di sconto ha acquistato il cellulare? Risposta 64

Soluzione – Posto 100 il costo iniziale del cellulare, col 50% il prezzo scenderebbe a 50. Se poi a 50 applichiamo l'ulteriore 20%, che corrisponde a 10, il prezzo si riduce a 40. Se infine applichiamo il 10% del buono, che corrisponde a 4, il costo finale scende a 36. Lo sconto è allora di 64 su 100, cioè del 64%.

13. Un uovo di Pasqua è formato da una semisfera di raggio 5 cm sormontata da un cono, la cui circonferenza di base coincide con la circonferenza massima della semisfera. L'uovo è alto 17 cm. È formato da due parti perfettamente simmetriche e poi incollato. Il taglio è perfettamente ricoperto da un nastro che culmina con un fiocco. Se per fare il fiocco sono stati necessari 50 cm di nastro, quanti mm di nastro sono serviti in totale? Risposta 917

Soluzione - Il nastro ha la lunghezza di una semicirconferenza massima



della semisfera + 2 volte la lunghezza dell'apotema del cono. L'altezza del cono, in cm, è uguale all'altezza dell'uovo diminuito della misura del raggio: $17 - 5 = 12$.

$$\text{Apotema cono} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

$$\text{Lunghezza semicirconferenza massima della semisfera} = 5\pi$$

$$\text{Lunghezza nastro} = 5\pi + 2 \cdot 13 \text{ cm} + 50 \text{ cm} = 5\pi + 76 \text{ cm} = 91,7 \text{ cm} = 917 \text{ mm}$$

14. Lisa, che lavora alla biglietteria di un teatro, racconta a Rita uno strano episodio accaduto per l'ultima rappresentazione. Erano stati venduti tutti i biglietti dei posti in prima fila, numerati a partire da 1. Per un errore nel sito del teatro era però stato venduto un biglietto in più. Rita le chiede il numero del posto venduto due volte e Lisa risponde: "Puoi dedurlo sapendo che la somma dei numeri dei posti segnati sui biglietti venduti per la prima fila è 424". Qual è il posto per cui sono stati venduti due biglietti? Risposta 18

Soluzione – Si può procedere sommando i numeri consecutivi a partire da 1 e fermandosi quando la somma supera 424. Si trova:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 28 = 406 \qquad 1 + 2 + 3 + \dots + 28 + 29 = 435$$

Quindi i posti in prima fila sono 28 e quello ripetuto si ottiene da $424 - 406 = 18$.

15. Una signora non molto discreta viene a conoscenza di una notizia che riguarda la sua vicina e non resiste alla tentazione di spargere la voce fra le 15 amiche che abitano nella stessa strada. A ciascuna occorrono 10 minuti per riferire il pettegolezzo ad un'altra. Qual è il numero minimo di minuti necessario perché tutte siano informate? Risposta 40

Soluzione – Occorrono 10 minuti perché la signora A parli con la signora B; nei 10 minuti successivi A e B comunicano la notizia a C e D ($1 + 1 + 2$); nei successivi 10 minuti le 4 signore riferiranno la notizia ad altre 4 signore (8); basteranno altri 10 minuti per informare tutte le 16 persone. Totale 40